KONTROLLSKRIVNING 1 Version **A** 16 sep 2009
CMEDT1

Tid 45 min. **Inga hjälpmedel är tillåtna på kontrollskrivningar.**
För godkänd krävs 6 poäng av total 12 poäng.
a) Om du uppnår 6-8 poäng på KS1 får du 3 poäng på tentauppgift 1, vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen.
b) Om du uppnår minst 9 poäng på KS1 får du istället 4 poäng på tentauppgift 1 ( och behöver inte lösa denna uppgift).
Bonuspoäng tillgodoräknas på ordinarie tentamen samt ordinarie omtentan.

**Uppgift 1.** ( 3p) Ekvationen $z^3 - iz^2 - 4z + 30i = 0$ har en rot $z_1 = 3i$. Bestäm ekvationens samtliga rötter.

**Uppgift 2.** (3p) Visa med hjälp av den matematiska induktionen att för alla heltal $n \geq 1$ gäller likheten

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+3) = n^2 + 4n.$$

**Uppgift 3.** (3p) Bestäm alla reella tal *a* sådana att vektorerna
$\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$ och $\vec{w} = (4, 2, a)$
spänner upp en parallellepiped med volym 4.

**Uppgift 4.** (3p)
En partikel som rör sig i rätlinjig bana med konstant hastighet befinner sig vid tiden $t$=0 i punkten (2, –1, 6) och vid $t$=1 i punkten (4, 1, 4).
Vid vilken tid passerar partikeln xy- planet?
I vilken punkt sker detta?

*Lycka till!*

KONTROLLSKRIVNING 1 Version **A** 16 sep 2009
CMEDT1
LÖSNINGSFÖRSLAG:

**Uppgift 1.** ( 3p) Ekvationen $z^3 - iz^2 - 4z + 30i = 0$ har en rot $z_1 = 3i$. Bestäm ekvationens samtliga rötter.

**Lösning:**
Polynomdivision och faktorisering ger $z^3$-i$z^2$-4z+30i=($z^2$+2iz-10)(z-3i)
Kvadratkomplettering ger $(z+i)^2=9$ $z_{2,3} = -i \pm 3$

lösningar $z_1 = 3i$, $z_2 = 3 - i$ $z3 = -3 - i$

**Uppgift 2.** (3p) Visa med hjälp av den matematiska induktionen att för alla heltal $n \geq 1$ gäller likheten

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+3) = n^2 + 4n$$

**Lösning:**
**a)** Då $n = 1$ har vi VL=5 och HL=5 dvs VL=HL.
Alltså gäller påstående för n=1.
**b)** Antag att det för givet *n* gäller påståendet, $P(n)$,

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+3) = n^2 + 4n \qquad (*)$$

Vi vill visa att då gäller $P(n+1)$ d v s att

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k+3) = (n+1)^2 + 4(n+1)$$

som kan skrivas som

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k+3) = n^2 + 6n + 5 \quad (**) .$$

Vi startar med vänsterleden i (**) .

$$VL = \sum_{k=1}^{n+1} (2k+3) = \sum_{k=1}^{n} (2k+3) + 2(n+1) + 3 =$$

( enligt antagande $\sum_{k=1}^{n} (2k+3) = n^2 + 4n$ )

$$= n^2 + 4n + 2(n+1) + 3 = n^2 + 4n + 2n + 2 + 3$$

$$= n^2 + 6n + 5 = HL$$

Alltså $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Från **a)** och **b)** får vi, enligt den matematiska induktionen, att påståendet gäller för alla heltal $n \geq 1$ .

**Uppgift 3.** (3p) Bestäm alla reella tal *a* sådana att vektorerna
$\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$ och $\vec{w} = (4, 2, a)$
spänner upp en parallellepiped med volym 4.

**Lösning :**
Den **parallellepiped** som bestäms (späns upp) av $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ har volymen

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}| = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix} \right| = \left| 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \right| = |4a - 4|$$

$V = 4 \Rightarrow |4a - 4| = 4 \Rightarrow 4a - 4 = \pm 4$.

Ekv1: $4a - 4 = 4 \Rightarrow a = 2$, Ekv2: $4a - 4 = -4 \Rightarrow a = 0$

**Svar:** Två lösningar: $a_1 = 2$, $a_2 = 0$ .

**Uppgift 4.** (3p)
En partikel som rör sig i rätlinjig bana med konstant hastighet befinner sig vid tiden *t*=0 i punkten A=(2, –1, 6) och vid *t*=1 i punkten B= (4, 1, 4).
Vid vilken tid passerar partikeln xy- planet?
I vilken punkt sker detta?

**Lösning :** Linjens riktningsvektor: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ =(2, 2, -2)
Linjens ekvationer:

$$x = 2 + 2t$$
$$y = -1 + 2t$$
$$z = 6 - 2t$$

Eftersom xy-planet har ekvationen z=0 får vi skärningspunkten ur
$6 - 2t = 0 \Rightarrow t = 3$.
Punkten för t=3: $x = 2 + 2t = 8$, $y = -1 + 2t = 5$, z=0.
**Svar:** Tiden *t*=3, skärningspunkten P=( 8, 5, 0).