KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till modellkontrollskrivning 1

Uppgifter och lösningsförlag kommer från den kontrollskriving Alan Sola gav för CMAST1 2009-09-16.

UPPGIFT

a) Polynomet $3x^4+9x^3+12x^2+36x$ har ett nollställe i $x = -2i$. Bestäm samtliga nollställen till polynomet. **(3)**

b) Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k) = \frac{n^3 - n}{3}, \qquad \text{för } n = 1, 2, \cdots$$

(3)

c) Beskriv vilka möjligheter som finns för skärningen av två plan i rummet. Illustrera gärna med bilder. Avgör om planen som definieras av ekvationerna $4y+z-2 = 0$ och $x+z+5 = 0$ skär varandra. Ange den eventuella skärningsmängden. **(3)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Vi noterar först att det givna polynomet $p(x) = 3x^4 + 9x^3 + 12x^2 + 36x$ är reellt, dvs alla koefficienter i polynomet är reella tal. En känd sats garanterar nu att konjugatet till det givna komplexa nollstället, $x = 2i$, också är ett nollställe. Vi drar slutsatsen att $(x + 2i)(x - 2i) = x^2 + 4$ är en faktor i polynomet p. Vi ser vidare att $x = 0$ är ett nollställe till polynomet. Vi bryter ut faktorn $3x$ ur $p(x)$ och betraktar $q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$. Polynomdivision visar nu att $q(x) = (x^2 + 4)(x + 3)$. Allträ utför $x = 0$, $x = \pm 2i$ samt $x = -3$ nollställena till polynomet p.

b) Vi börjar med att behandla basfallet$n = 1$. Vänsterledet är då

$$1^2 - 1 = 0,$$

med högerledet är

$$\frac{1^3 - 1}{3} = 0.$$

Påståendet är därmed sant i basfallet.

Vi antar nu att

$$\sum_{k=1}^{N} = \frac{N^3 - 1}{3}$$

är sant för något N och vi ska visa att

(1) $$\sum_{k=1}^{N+1} = \frac{(N+1)^3 - (N+1)}{3}$$

följer. Vänsterledet i (1) kan skrivas

$$\sum_{k=1}^{N} + (N+1)^2 - (N+1) = \sum_{k=1}^{N} + N^2 + 2N + 1 - N - 1$$
$$= \sum_{k=1}^{N} + N^2 + N.$$

Vi ersätter summan med $(N^3 - N)/3$ i enlighet med vårt induktionsantagande och får att vänsterledet i (1) är lika med

$$\frac{N^3 - N}{3} + N^2 + N = \frac{N^2 - N + 3N^2 + 3N}{3} = \frac{N^2 + 3N^2 + 3N + 1 - N - 1}{3}.$$

Efter en omskrivning ser vi att uttrycket i högerledet är lika med $((N+1)^3 - (N+1))/3$, vilket skulle visas. Induktionsaxiomet ger oss nu att påståendet är sant för alla $n \geq 1$.

c) Planen kan sammanfalla, de kan skära varandra i en linje eller vara parallella men disjunkta. För bilder, se kursboken, sidan 157.[1]

Punkter som ligger i skärningen mellan de två planen uppfyller båda de definierande ekvationerna samtidigt, det vill säga, vi har

$$4y + z - 2 = x + z + 5$$

för sådana punkter. Ekvationen ovan ger att $x = -7 + 4y$. Vi sätter nu att $y = t$ för $t \in \mathbb{R}$. Vi vet redan att $x = -7 + 4t$ och från ekvationen $4y + z - 2$ följer också att $z = 2 - 4t$. Skärningslinjen mellan de två planen beskrivs alltså av

$$(x, y, z) = (-7, 0, 2) + t(4, 1, -4), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Svar:

a) Nollställena till polynomet är $x = 0$, $x = \pm 2i$ och $x = -3$.

c) Planen skär varandra i linjen $(x, y, z) = (-7, 0, 2) + t(4, 1, -4)$, $t \in \mathbb{R}$.

---

[1]Linear Algebra av Anton-Rorres

BEDÖMNINGSKRITERIER

a)
- Korrekt motiverad rot $x = -2i$, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad rot $x = 0$, **1 poäng**.
- Korrekt användningar av faktorsatsen för att finna den återstående roten, **1 poäng**.

b)
- Korrekt hantering av basfallet, **1 poäng**.
- Korrekt induktionsantagande och användning av detta för att utföra induktionssteget, **1 poäng**.
- Korrekt slutfört induktionsbevis med hänvisning till induktionsaxiomet eller induktionsprincipen, **1 poäng**.

c)
- Korrekt beskrivning av de tre fallen med illustrerande bilder, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till att planen skär varandra i en linje, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av lösningsmängden , **1 poäng**.

Bedömning av presentationen. Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

0p Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.

1p Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.

2p Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.

3p Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar. (Dessutom krävs minst sex poäng på uppgifterna)

Egenbedömning. Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömninngskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning. Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.