KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1
Måndagen den 9 november 2009

UPPGIFT

a) Bestäm rötterna till ekvationen $z^2 + 4z + 4 - 2i = 0$. **(3)**

b) Använd vektorprodukten för att bestämma ekvationerna för två parallella plan, ett som innehåller linjen $(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, 2, -1)$ och ett som innehåller linjen $(x, y, z) = (5, 1, 2) + t(2, 2, 1)$. **(3)**

c) Använd induktionsprincipen för att visa att

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1)2^{n+1},$$

för alla heltal $n \geq 0$. **(3)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Vi kvadratkompletterar ekvationen och får då:

$$(z+2)^2 - 4 + 4 - 2i = 0 \iff (z+2)^2 = 2i.$$

Om vi ansätter $z + 2 = x + iy$ där x och y är reella får vi

$$(x+iy)^2 = 2i \iff x^2 - y^2 + 2xyi = 2i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= 0, \\ 2xy &= 2. \end{cases}$$

Vi kan lösa ut $y = 1/x$ ur den andra ekvationen och sätta in i den första och vi får

$$\begin{cases} x^2 - 1/x^2 &= 0, \\ y &= -4/x. \end{cases}$$

Om vi sätter $t = x^2$ i den första ekvationen blir det

$$t - 1/t = 0 \iff t^2 - 1 = 0,$$

eftersom $t \neq 0$. Vi kan förkasta roten $t = -1$ eftersom $t = x^2$ och kan dra slutsatsen att $t = 1$ och $x = \pm 1$.

När vi sätter in detta i den andra ekvationen får vi $y = 1/x = \pm 1$. Alltså har vi lösningarna

$$z = -2 \pm (1+i),$$

dvs $z_1 = -1+i$ och $z_2 = -3-i$.

b) Normalen till ett plan som innehåller en linje måste vara vinkelrät mot linjens riktningsvektor. Eftersom parallella plan har samma normalvektor måste normalen till de sökta planen vara ortogonal mot båda linjernas riktningsvektorer. Vi kan därför använda vektorprodukten för att finna normalvektorn:

$$\begin{aligned}\overline{n} &= \overline{u} \times \overline{v} = (1,2,-1) \times (2,2,1)\\ &= (2\cdot 1 - (-1)\cdot 2, (-1)\cdot 2 - 1\cdot 1, 1\cdot 2 - 2\cdot 2) = (4,-3,-2)\end{aligned}$$

Ekvationerna för de bägge planen kan nu skrivas

$$4x - 3y - 2z = d \quad \text{och} \quad 4x - 3y - 2z = e$$

för konstanter d och e. För att bestämma dessa konstanter kan vi sätta in en punkt från varje plan och vi får då

$$d = 4\cdot 1 - 3\cdot 2 - 2\cdot 0 = 4 - 6 - 0 = -2$$

och

$$e = 4\cdot 5 - 3\cdot 1 - 2\cdot 2 = 20 - 3 - 4 = 13.$$

Alltså är de två planens ekvationer

$$4x - 3y - 2z = -2 \quad \text{och} \quad 4x - 3y - 2z = 13.$$

c) Basfallet ges av $n = 0$. Vi har då att vänsterledet bara består av en term, $0 \cdot 2^0 = 0$. Högerledet är lika med

$$2 + (0-1)\cdot 2^{0+1} = 2 + (-1)\cdot 2 = 0.$$

Alltså stämmer påståendet i basfallet, $n = 0$.

Antag nu att påståendet gäller för $n = m$, där m är något naturligt tal. Vi vill använda detta för att visa att det då också gäller för $n = m+1$. Vi har att

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1} k\cdot 2^k &= \sum_{k=0}^{m} k\cdot 2^k + (m+1)2^{m+1}\\ &= [\text{enligt antagandet}] = 2 + (m-1)2^{m+1} + (m+1)2^{m+1}\\ &= 2 + 2m\cdot 2^{m+1} = 2 + m\cdot 2^{m+2},\end{aligned}$$

vilket är lika med högerledet för $n = m+1$ eftersom $m = (m+1)-1$ och $m+2 = (m+1)+1$.

Enligt induktionsprincipen har vi nu visat att påståendet gäller för alla naturliga tal n.

Svar:

a) Rötterna till ekvationen är $z_1 = -1+i$ och $z_2 = -3-i$.

b) De två planens ekvationer är $4x - 3y - 2z = -2$ och $4x - 3y - 2z = 13$.

BEDÖMNINGSKRITERIER

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag, men de måste i så fall identifieras och markeras tydligt vid egenbedömningen.

a)
- Korrekt kvadratkomplettering, **1 poäng**.
- Korrekt ansats för att finna kvadratrötterna ur $2i$, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd lösning av ekvationen, **1 poäng**.

b)
- Korrekt beräknad vektorprodukt, **1 poäng**.
- Korrekt ekvation för ett av planen, **1 poäng**.
- Korrekt ekvation för det andra planet, **1 poäng**.

c)
- Korrekt hantering av basfallet, **1 poäng**.
- Korrekt utfört induktionssteg, **1 poäng**.
- Korrekt slutfört induktionssteg med hänvisning till induktionsprincipen, **1 poäng**.

Bedömning av presentationen. Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

0p Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.

1p Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.

2p Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.

3p Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar. (Dessutom krävs minst sex poäng på uppgifterna)

Egenbedömning. Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömninngskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning. Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.