

**Problem och övningar till lektionspass L5, 3/11.**

(1) Beräkna

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln \sqrt{x} & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \quad \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \\ \text{d)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2 \log_2 x - x^3}{3x^3} + \frac{e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \right) & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{e^x - 1 - x} \end{array}$$

Det finns ofta flera naturliga sätt att beräkna ett gränsvärde. Så är t ex fallet i b) och e) i denna uppgift.

- (2) Bestäm värdemängden till funktionen  $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ .
- (3) Man vill tillverka en burk i form av rätblock med kvadratisk bottenyta och utan lock. Hur skall burken dimensioneras för att materialåtgången ska bli så liten som möjligt?
- (4) Rita kurvan  $y = \frac{x}{x-1} e^{1/x}$  med angivande av eventuella extrempunkter och asymptoter.
- (5) En 2 meter lång stege står lutad mot väggen i ett rum. Stegen börjar glida så att den övre änden glider ner för väggen med en hastighet av 1 dm/s (den nedre ände förblir på golvet och glider följaktligen bort från väggen). Hur snabbt ändrar sig vinkeln mellan stegen och golvet i det ögonblick då den övre änden befinner sig en halv meter över golvet?
- (6) Visa att ekvationen  $x^4 + x = 1$  har precis en lösning, och förklar hur man med hjälp av Newton-Raphsons metod kan bestämma ett approximativt värde på denna lösning.
- (7) Visa med hjälp av derivatans definition att funktionen  $f(x) = e^x$  är sin egen derivata. Här kan du ha nytta av standardgränsvärdet  $\lim_{h \rightarrow 0} (e^h - 1)/h = 1$ . Härled sedan derivatan av  $f^{-1}(x) = \ln x$ .
- (8) Är det sant att  $\arctan x > x - x^3/3$  om  $x > 0$ ? Vad gäller för  $x < 0$ ?

- (9) Ge om möjligt exempel på funktioner som på det öppna intervallet  $(0, 1)$  (i) saknar såväl största som minsta värde (ii) har ett minsta värde men inget största värde (iii) har ett största värde men inget minsta värde (iv) har både ett största och ett minsta värde.

Besvara samma frågor för det slutna intervallet  $[0, 1]$

- (10) Låt  $F(x) = e^{x^2/2}$ .
- (a) Bestäm 4:e ordningens MacLaurinutvecklingen till  $F(x)$ . (Detta kan göras på ett par olika sätt.)
  - (b) Bestäm 3:e ordningens MacLaurinutveckling till  $F'(x)$ . (Detta kan också göras på ett par olika sätt!)
  - (c) Bestäm approximativa numeriska värden på  $k$  och  $m$  då  $y = kx + m$  är tangentlinje till  $y = F(x)$  i den punkt där  $x = 0.1$ .
  - (d) Bestäm  $n$ :e ordningens MacLaurinutveckling till  $F(x)$ .