

KTH Matematik  
Hans Thunberg

SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra  
HT 2008 för Öppen Ingång

**Problem och övningar till lektionspass L11, 24/11.**

- (1) Låt  $A(t)$  vara arean av det område som ges av olikheterna  $0 < x < t$  och  $0 < y < x\sqrt{1+x}$ . Bestäm  $A(1)$  och  $A'(1)$ .

- (2) Bestäm alla primitiva funktioner till

$$R(x) = \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^3 + x}$$

- (3) (a) Visa att

$$\frac{1}{2} < \int_0^2 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} < 1.$$

Tips: Dela integrationsintervallet i fyra lika stora delar och stäng in integranden mellan lämpliga trappfunktioner.

- (b) Ange också den översumma och den undersumma som hör till en indelning av integrationsintervallet i  $n$  lika delar.

- (4) (a) Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$$

är konvergent eller divergent genom att (i) göra en jämförelse med lämpligt standardfall (ii) beräkna det gränsvärde som definierar denna integral.

- (b) Vad kan du säga om serien  $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(1+n^2)^2}$ ? Är den konvergent, ge i sådana fall en uppskattning av dess summa, eller divergent?

- (5) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området  $0 \leq y \leq \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , får rotera kring  $x$ -axeln. Härled först den generella formeln för volymen av rotationskroppar som uppkommer när områden av formen  $0 \leq y \leq f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , får rotera runt  $x$ -axeln.

- (6) Beräkna längden av kurvan  $y = \ln \cos x$ ,  $\pi/6 \leq x \leq \pi/4$ .

*V G Vänd*

- (7) Beräkna  $\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$  genom att göra varibelsubstitutionen  $t = e^x$ .
- (8) (Uppgift 7.54 i *Övningar i Analys i en variabel*.) När en viss fjäder sträcks eller trycks ihop, så är kraften proportionell mot fjäderns längdändring (Hookes lag). Belastningen 250 N ger en längdändring av 5 cm. Bestäm det arbete som krävs för att tänja ut fjädern 10 cm från jämviktsläget.
- (9) (Uppgift i 8.71 i *Övningar i Analys i en variabel*.) I ett hus där värmesystemet plötsligt upphör att fungera är det rimligt att antaga att temperatursänkningen per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperatur. Antag att yttertemperaturen är konstant  $-10^\circ\text{C}$ . Om innetemperaturen var  $20^\circ\text{C}$  när värmesystemet upphörde att fungera och  $15^\circ\text{C}$  efter två timmar, vad är då temperaturen i huset efter 1 dygn?
- (10) Bestäm alla funktioner  $f(x)$  som uppfyller ekvationen

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = x.$$

Undersök hur dessa lösningar beter sig när  $x \rightarrow \pm\infty$ .