

Extra övningsuppgifter på bestämda integraler

(1) Beräkna följande integraler

$$\text{a)} \int_0^1 x^3 dx \quad \text{b)} \int_1^0 x^3 dx \quad \text{c)} \int_1^8 x^{-1/3} dx \quad \text{d)} \int_0^{\ln 2} e^{4t} dt \quad \text{e)} \int_1^e s^{-1} ds$$

(2) Beräkna de bestämda integralerna

$$I_1 = \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{4} dx, \quad I_2 = \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi x}{4} dx, \quad I_3 = \int_0^1 \cos \frac{\pi x}{4} dx \quad \text{och} \quad I_4 = \int_{-1}^1 \cos \frac{\pi x}{4} dx.$$

(3) I föregående uppgift hade man kunnat konstatera direkt, utan beräkningar, att $I_2 = 0$ och att $I_4 = 2I_3$. Förklara!

Exempel. Räkna först uppgift 5.7 i Persson-Böiers *Övningar i analys i en variabel*. När man vill beräkna bestämda integraler med substitutioner finns det flera olika varianter på ”metod-tänk” (den matematiska idén är densamma). Vi illusterar detta med ett exempel.

Vi beräknar $\int_0^3 2xe^{x^2} dx$ och visar tre olika sätt att genomföra kalkylen.

(I)

$$\int_0^3 2xe^{x^2} dx = \left\{ \text{Vi ”ser” direkt att } e^{x^2} \text{ är en primitiv} \right\} = \left[e^{x^2} \right]_0^3 = e^9 - 1.$$

(II)

$$\begin{aligned} & \int_0^3 2xe^{x^2} dx \\ &= \left\{ \text{Vi substituerar } t = x^2, \text{ vilket ger } dt = 2x dx. \text{ Nya gränserna beräknas ej} \right\} \\ &= \int_*^{**} e^t dt = [e^t]_*^{**} = \left\{ \text{Återsubstitution } t = x^2 \right\} = \left[e^{x^2} \right]_0^3 = e^9 - 1. \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} & \int_0^3 2xe^{x^2} dx \\ &= \left\{ \text{Vi substituerar } t = x^2, \text{ vilket ger } dt = 2x dx. \text{ Nya gränser: } t(0) = 0, t(3) = 9 \right\} \\ &= \int_0^9 e^t dt = [e^t]_0^9 = e^9 - 1. \end{aligned}$$

Syftet med exemplet ovan, och med nästa uppgift, är att illustera hur substitutioner i bestämda integraler kan hanteras. I praktiskt bruk är det naturligtvis så att om man direkt ”ser” den primitiva funktionen så behöver man inte genomföra substitutionen; substitutioner är ett verktyg då man *inte* ser precis vad primitiven är.

(4) Beräkna nu följande två integraler. Genomför kalkylen på de tre sätt som exemplifieras ovan för de bågge integralerna.

$$\text{a)} \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos x^2 dx \quad \text{b)} \quad \int_0^1 \frac{3u^2}{u^3 + 1} du$$

(5) Beräkna följande bestämda integraler

$$\text{a)} \quad \int_{-1}^1 e^{3x} (1 + e^{3x})^2 dx \quad \text{b)} \quad \int_0^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

(6) Beräkna följande bestämda integraler. (Jfr Uppgift 5.16 i Persson-Böiers)

$$\text{a)} \quad \int_0^1 \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt \quad \text{b)} \quad \int_0^3 x \sqrt{x+1} dx \quad \text{c)} \quad \int_{-2}^{-1/2} \frac{w}{\sqrt{2w+5}} dw$$

(7) Beräkna följande bestämda integraler.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int_0^\pi x \sin x dx & \text{b)} \quad \int_1^e x \ln x dx \quad \text{c)} \quad \int_0^1 \arctan u du \\ \text{d)} & \int_{-1}^1 t^2 e^t dt & \text{e)} \quad \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx \end{array}$$

(8) Beräkna följande bestämda integraler.

a) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx$

b) $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} dx$

c) $\int_3^5 \frac{2x^2 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$

d) $\int_0^1 \frac{8x^2 - 4x + 7}{(x^2 + 1)(4x + 1)} dx$

Svar och tips

1. a) $1/4$ b) $-1/4$ c) $9/2$ d) $15/4$ e) 1

2. $I_1 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\pi}$, $I_2 = 0$, $I_3 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, $I_4 = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$

3. Utnyttja att sinus och cosinus är udda respektive jämn funktioner

4. a) 0 b) $\ln 2$

5. a) $\frac{e^3}{3} + \frac{e^6}{3} + \frac{e^9}{9} - \frac{e^{-3}}{3} - \frac{e^{-6}}{3} - \frac{e^{-9}}{9}$ b) 4

6. a) $\arctan e - \pi/4$ b) $116/15$ c) $-4/3$

7. a) π b) $\frac{e^2 + 1}{4}$ c) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ d) $e - 5/e$ e) $2\pi^2 - 8$

8. a) $\pi/8$ b) $1 - \frac{5}{4} \ln 3$ c) $\ln 2$ d) $2 \ln 5 - \pi/4$