KTH Matematik
Hans Thunberg

SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2009 för Öppen Ingång

Grupparbete till lektionspass L9, 17/11

(1) Vi skall studera differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = x - y.$$

(a) Skissera differentialekvationens riktningsfält, och skissera också några typiska lösningskurvor $y = y(x)$. Vad är det asymptotisk beteendet hos lösningarna när $x \to \infty$?
(b) Låt $y(x)$ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet $y' = x - y$, $y(0) = 1$. Bestäm ett approximativt värde på $y(0.5)$ med Eulers stegmetod. Använd steglängden $h = 0.1$.
(c) Förklara hur man skulle gå till väga för att få en bättre approximation med Eulers metod.
(d) Lös differentialekvationen $y' = x - y$ och bestäm det exakta värdet $y(0.5)$ när $y(x)$ är den som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. Jämför med din approximation i b).
(e) Visa att linjen $y = x - 1$ är en asymptot när $x \to \infty$ till varje lösning till den givna differentialekvationen.

(2) Befolkningsstorleken $P(t)$ i en viss stad, där P är antalet invånare och t är tiden mätt i månader, modelleras med begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dP}{dt} = P\left(10^{-1} - 10^{-6}P\right), \qquad P(0) = 5000$$

(a) Skissera riktningsfältet till differentialekvationen.
(b) Skissera den lösningskurva som ges av begynnelsevillkoret $P(0) = 5000$.
(c) Hur snabb är befolkningstillväxten vid tiden $t = 0$?
(d) Hur stor kan befolkningen bli enligt denna denna modell?

(3) Lös differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x} = y$. Bestäm också den lösning som uppfyller villkoret $y(-2) = 0$

Var god vänd!

Läsuppgift: Integralkalkylens huvudsats via Eulers metod
Antag att vi känner funktionen F:s värde i punkten $x = a$, och att vi också känner värdet av funktionens derivata i alla punkter x, $a < x < b$. (I övrigt är funktionen F okänd.) Utifrån detta vill vi beräkna funktionsvärdet $F(b)$.

Detta är ekvivalent med att lösa initalvärdesproblemet

$$F'(x) = f(x) \quad \text{(där } f \text{ är en känd funktion)}, \qquad F(a) = A$$

på intervallet (a, b), och sedan beräkna $F(b)$.

Vi kan i princip rekonstruera grafen $y = F(x)$ med Eulers metod: Vi vet att vi ska starta i punkten $(a, F(a))$ och sedan hela tiden röra oss åt höger i en riktning som i varje punkt ges av derivatan (som antogs vara känd).

Mer precist kan man göra så här:

- Dela intervallet $[a, b]$ i n st. lika delinterval med hjälp av punkter
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$
och sätt $h = (b - a)/n$.
- Om n är stort så är h litet och man kan hävda att
$$F(x_1) \approx F(x_0) + F'(x_0)h = F(a) + F'(x_0)h$$
Varför då?
- På samma sätt får man då att
$$F(x_2) \approx F(x_1) + F'(x_1)h.$$
Alltså är
$$F(x_2) \approx F(a) + F'(x_0)h + F'(x_1)h.$$
- Genom att upprepa detta resonemang kommer vi fram till att
$$F(b) = F(x_n) \approx F(a) + F'(x_0)h + F'(x_1)h + \cdots + F'(x_{n-1})h,$$
vilket kan skrivas som
$$F(b) - F(a) \approx \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k)h.$$
('*Totala förändringen* $\approx$ *summan av förändringshastigheter* $\cdot$ *steglängd*')

Eftersom mittenledet är en Riemannsumma till $f(x) = F'(x)$ på intervallet (a, b) svarande mot indelning i n delintervall av längd h, kommer denna summa att konvergera mot $\int_a^b f(x)\,dx$ när $n \to \infty$, samtidigt som den konvergerar mot vänsterledet $F(b) - F(a)$ när approximationerna blir bätter och bättre. Alltså gäller att

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$