KTH Matematik
Hans Thunberg

SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2009 för Öppen Ingång

Grupparbete till lektionspass L8, 13/11

(1) (a) Ett område $0 \leq g(x) \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$, roterar kring x-axeln. Härled formeln för volymen av den rotationskropp som då uppstår.
(b) Beräkna volymen av den kropp som bildas då området som begränsas av kurvorna $y = x^4$ och $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, roterar kring x-axeln.

(2) (a) Härled uttrycket för längden av en funktionskurva.
(b) Teckna längden för parabelbågen $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.
(c) Vi söker ett numeriskt värde på längden av parabelbågen i b). Beräkna eller uppsaktta den på lämpligt sätt. Jämför med vad de andra grupperna har gjort vid genomgång av grupparbetet.

(3) (a) En summa med oändligt många termer kallas en *serie*. Rita en figur (typ "tårtdiagram") som antyder att följande likhet "borde" gälla:

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \cdots = 1.$$

(b) Låt $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$, summan av de n första termerna i den oändliga summan i a). Visa att $S_n = 1 - 2^{-(n+1)}$
(c) Summan av serien $S = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ defineras nu som

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Visa att $S = 1$, i överenstämmelse med vårt intuitiva resonemang i a).
(d) Det finns ett släktskap mellan vissa serier och vissa generaliserade integraler. Rita en figur som visar att

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2^x}\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}. \qquad \text{(Jfr figur sid 340 i Persson \& Böiers.)}$$

(e) Förklara varför det innebär att den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{2^x}\,dx$ är konvergent.
(f) Vad kan man säga om arean av det obegränsade område som ges av olikheterna $0 \leq y \leq 1/2^x$, $x \geq 1$.
(g) Beräkna $\int_1^{\infty} \frac{1}{2^x}\,dx$ exakt.