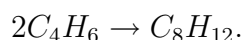


KTH Matematik
Hans Thunberg

SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2009 för Öppen Ingång

Grupparbete till lektionspass L10, 20/11

- (1) (enligt Övning 8.31 ur Persson-Böiers Övningar i Analys i en variabel).
Under vissa omständigheter ombildas (dimeriseras) butadien C_4H_6 enligt formeln



Koncentrationen av butadien förändras då med en hastighet som är proportionell mot kvadraten på den kvarvarande mängden butadien. Bestäm koncentrationen av butadien som funktion av tiden $c(t)$, om den initiala koncentrationen är $c(0) = c_0$.

- (2) Ett fjädrande och dämpat system har rörelseekvationen

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

om det inte är utsatt för några yttre krafter. Här är $m > 0$ systemets massa, $c > 0$ är dämpningskoefficienten och $k > 0$ fjäderkonstanten. Bestäm relationerna mellan m , c och k för att systemets karakteristiska ekvation ska ha

- (a) två reella rötter $r_1 < r_2 < 0$ (systemet sägs då vara överkritiskt dämpat);
- (b) en reell dubbelrot $r < 0$ (så kallad kritisk dämpning)
- (c) komplexa rötter $r = -\alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$ (så kallad underkritisk dämpning)

Förklara också varför fallen med en eller två positiva reella rötter eller komplexa rötter med positiv realdel inte kan inträffa för ett system som detta.

- (3) Ange och skissera lösningar lösningarna till de tre fallen i föregående uppgift om systemet startar med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. (Termerna överkritisk, kritisk och underkritisk dämpning har sin förklaring i lösningarnas olika beteende.)

Tips: Du behöver inte uttrycka de karakteristiska rötterna i termer av m , c och k , det komplicerar bara räkningarna i onödan.

V G vänd

- (4) En partikel med massa $m = 1$ är fäst vid en fjäder med fjäderkonstant $k = 4$. Om friktionen försummas, och inga yttre krafter verkar på systemet, beskrivs partikelns svängningar kring jämviktsläget av en funktion $y(t)$ som uppfyller

$$y'' + 4y = 0.$$

- (a) Bestäm den allmänna lösningen $y(t)$, som alltså beskriver systemets inreboende svängningsegenskaper utan yttre påverkan, de s k *egensvängningarna*.
- (b) En periodisk drivande kraft adderas till systemet, som nu beskrivs av ekvationen

$$y'' + 4y = \sin 2t.$$

Bestäm den allmänna lösningen i detta fall. Hur beter sig lösningen när $t \rightarrow \infty$?

- (c) Det senare fallet är ett exempel på s k *resonans* som ger svängningsamplituder som blir obegränsat stora — systemet kollapsar. Förklara vad det är som ger upphov till resonansen