Tentamensskrivning, 2010-05-29, kl. 9.00-14.00.
SF1621(5B1141) och SF1619(5B1133),
Analytiska metoder och linjär algebra II.

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Preliminära betygsgränser:

- A: godkänt på alla momenten 1-5 och 14-20 p på uppgifterna 6-10
- B: godkänt på alla momenten 1-5 och 11-13 p på uppgifterna 6-10
- C: godkänt på alla momenten 1-5 och 8-10 p på uppgifterna 6-10
- D: godkänt på alla momenten 1-5 och 5-7 p på uppgifterna 6-10
- E: godkänt på alla momenten 1-5 och 3-4 p på uppgifterna 6-10
- Fx: underkänt med rätt till skriftlig komplettering. Ges för den student som antingen är godkänd på fyra av momenten 1-5 och har minst 3 poäng på uppgifterna 6-10 eller är godkänd på alla momenten 1-5 och har exakt 2 poäng på uppgifterna 6-10.
- F: underkänt utan rätt till komplettering.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydligt.

Lycka till!

1. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to: \mathbf{R}^2$ vara en linjär avbildning. Antag att $(1, 1)$ är en egenvektor till T med egenvärde 2 och $(1, 2)$ är en egenvektor till T med egenvärde 9. Bestäm standardmatrisen för T.

2. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan:

$$2x^3 + 4y^3 + 3z^3 + 3xyz = 9$$

i punkten $(2, -1, 1)$.

3. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

4. Beräkna dubbelintegralen:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$

då D ges av $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, och $y \leq 0$.

5. Beräkna linijeintegralen:

$$\int_\Gamma 2xy\ dx + (x^2 + 2yz)\ dy + (y^2 - 2z)\ dz$$

längs Γ som är skärningskurvan mellan ytan $z = x - x^2 + 2y$ och planet $z = x + y$ från $(-1, 1, 0)$ till $(1, 1, 2)$.

6. (4pt). Beräkna flödesintegralen:

$$\iint_\Sigma (-3y, 4x, z - x^2) \cdot n\ d\Sigma$$

där Σ är den del av ytan $z = 4x^2 + 3y^2$ där $x^2 + y^2 \leq 1$. Σ är orienterad så att enhetsnormalen n har negativ z-komponent.

7. (4pt). Bestäm alla punkter (x, y) kring vilka det finns en omgivning sådan att funktionen $f(x, y) = (x + \sin y, y + \sin x)$ har en differentierbar invers. Om $(0, \pi)$ är en sådan punkt, bestäm inversens Jacobimatris i punkten $(0, \pi)$.

8. (4pt). Bestäm största och minsta värdet av funktionen
$f(x, y) = 2x + 4y$ på den slutna ellipsskivan $3x^2 + 6y^2 \leq 16$.

9. (4pt). Beräkna $\int_\Gamma (xy^2 - y^3)dx + (x^3 + 4x^2y)dy$ där Γ är randen i positiv led till området $|x| + |y| \leq 2$.

10. (4pt). En $n \times n$ matris A uppfyller vilkoret $A^3 = A$. Bevisa att endast 0, 1, och -1 kan vara egenvärden till A.

Lösningsförslag till tentamen, 2010-05-29, kl. 9.00-14.00. SF1621 och 5B1141, Analytiska metoder och linjär algebra II.

1. $T(1,1) = 2(1,1) = (2,2)$ och $T(1,2) = 9(1,2) = (9,18)$.

För att $(0,1) = (1,2) - (1,1)$ och $(1,0) = 2(1,1) - (1,2)$, vi har:

$$T(0,1) = T(1,2) - T(1,1) = (9,18) - (2,2) = (7,16)$$

$$T(1,0) = 2T(1,1) - T(1,2) = (4,4) - (9,18) = (-5,-14)$$

Det ger:

$$[T] = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -14 & 16 \end{bmatrix}$$

2. Låt $F = 2x^3 + 4y^3 + 3z^3 + 3xyz - 9$. Vi har:

$$\text{grad}(F) = (6x^2 + 3yz, 12y^2 + 3xz, 9z^2 + 3xy)$$

Det ger: $\text{grad}(F)(2,-1,1) = (21,18,3)$. Den är en normal vektor till ytan i punkten $(2,-1,1)$. Alltså har tangentplanet en ekvation $21x + 18y + 3z = A$. Den passerar också genom punkten $(2,-1,1)$. Det betyder att: $42 - 18 + 3 = 27 = A$.

Tangentplanet har ekvation:

$$21x + 18y + 3z = 27$$

3. $f'_x = 3x^2 - 3y$ och $f'_y = 3y^2 - 3x$. Alltså $f'_x = 0$ om $y = x^2$ och $f'_y = 0$ om $x = y^2$. Det händer om $y = y^4$, d.v.s. om $y = 0$ eller $y = 1$. Vi får två kritiska punkter $(0,0)$ och $(1,1)$.

$A = f''_{xx} = 6x$, $B = f''_{xy} = -3$, och $C = f''_{yy} = 6y$. Alltså:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}H_f(0,0) = -9 < 0 \qquad \text{Det}H_f(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$$

I punkten $(0,0)$ har vi $\text{Det}H_f(0,0) = -9 < 0$. Vi kan konstatera att $(0,0)$ är en **sadelpunkt**.

I punkten $(1,1)$ har vi $\text{Det}H_f(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$ och $A = 6 > 0$. Vi kan konstatera att $(1,1)$ är en lokal **minimumpunkt**.

Funktionen f har bara en extrempunkt: en minimumpunkt i $(1,1)$.

4. Vi använder polära koordinater: $x = r\cos\alpha$ och $y = r\sin\alpha$, där $0 \le r \le 2$ och $\frac{-\pi}{2} \le \alpha \le 0$. Jakobimatrisen av den substitutionen är:

$$J = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Alltså $|\mathrm{Det}(J)| = |r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)| = r$.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy \int_{r=0}^{2}\int_{\alpha=\frac{-\pi}{2}}^{0} rr\ drd\alpha = \int_{\alpha=\frac{-\pi}{2}}^{0} d\alpha \int_{r=0}^{2} r^2 dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{r^3}{3}|_{r=0}^{2} = \frac{4\pi}{3}$$

5. Låt $(P,Q,R) = (2xy, x^2+2yz, y^2-2z)$. Notera att $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x}$, och $\frac{\partial Q}{\partial z} = 2y = \frac{\partial R}{\partial y}$. Det betyder att vektorfältet är konservativt och har en potentialfunktion U. Den uppfyller $\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy$. Det säger att $U = x^2y + f(y,z)$. Vi kan derivera U och få: $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz$. Det betyder att $f(y,z) = y^2z + g(z)$ och $U = x^2y + y^2z + g(z)$. Vi deriverar med avseende på z och få: $\frac{\partial U}{\partial z} = y^2 + \frac{\partial g}{\partial z} = y^2 - 2z$. Vi konstaterar att $g = -z^2$ och $U = x^2y + y^2z - z^2$.

$$\int_\Gamma 2xy\ dx + (x^2+2yz)\ dy + (y^2-2z)\ dz = U(1,1,2) - U(-1,1,0) = -2$$

6. Ytan kan parametrizeras med: $R(x,y) = (x, y, 4x^2+3y^2)$, där $x^2+y^2 \le 1$. Normalen av parametrisering:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = (1,0,8x)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = (0,1,6y)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} \times \frac{\partial R}{\partial y} = (-8x, -6y, 1)$$

Den har omvänd orientering.

$$\iint_\Sigma (-3y, 4x, z-x^2)\cdot n\ d\Sigma =$$

$$-\iint_{x^2+y^2\le 1} (-3y, 4x, 3x^2+3y^2)\cdot(-8x,-6y,1)dxdy =$$

$$= -\iint_{x^2+y^2\le 1} 3x^2+3y^2 dxdy$$

Vi använder polära koordinater: $x = r\cos\alpha$ och $y = r\sin\alpha$, där $0 \le r \le 1$ och $0 \le \alpha \le 2\pi$. Jakobi matrisen av den substitutionen är r. Alltså $|\mathrm{Det}(J)| = r$ och:

$$-\iint_{x^2+y^2\le 1} 3x^2+3y^2dxdy = -\int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} 3r^2rdrd\alpha =$$

$$-2\pi\frac{3}{4}r^4|_0^1 = \frac{-3\pi}{2}$$

7.

$$J_f = \begin{bmatrix} 1 & \cos y \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}$$

Funktionen f har en differentierbar invers i an omgivning av punkt (x, y) om och endast om J_f är inverterbar i punkten. Matrisen J_f är inverterbar om och endast om $\det J_f = 1 - \cos(x)\cos(y) \neq 0$.

Notera att $\cos(x)\cos(y) = 1$ om och endast om $\cos x = \cos y = 1$ eller $\cos x = \cos y = -1$. Det händer bara när $(x, y) = (2k\pi, 2l\pi)$ eller $(x, y) = ((2k+1)\pi, (2l+1)\pi)$, där k och l är godtyckliga heltal.

Vi konstaterar att f har en differentierbar invers i an omgivning av alla punkter utan punkter av typ $(2k\pi, 2l\pi)$ eller $((2k+1)\pi, (2l+1)\pi)$, där k och l är godtyckliga heltal. Särskilt, har f en differentierbar invers in en omgivning av $(0, \pi)$. I den punkten gäller:

$$J_f = \begin{bmatrix} 1 & \cos\pi \\ \cos 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jacobimatrisen för den inversa funktionen f^{-1} in en omgivning av $(0, \pi)$ ges av:

$$J_{f^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

8. Eftersom $f(x, y) = 2x + 4y$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $3x^2 + 6y^2 \leq 16$ är sluten och begränsad så har f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen eller i en singulär punkt. Inre kritiska punkter fås ur ekvationesystemet $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Här är $f'_x = 2 \neq 0$ alltså det finns inga inre kritiska punkter.

Kritiska punkter på randen $g(x, y) = 3x^2 + 6y^2 - 16$ kan fås med hjälp av Lagranges metod dvs genom att lösa ekvationssystemet $\text{grad}(f) = t\text{grad}(g)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$:

$$f'_x = tg'_x, \qquad f'_y = tg'_y, \qquad g = 0$$

dvs:

$$2 = 6tx, \qquad 4 = 12ty, \qquad 3x^2 + 6y^2 = 16$$

Ur den första och den andra ekvationen fås $x = y$ vilket, insatt i den tredje ekvationen, ger $x = \frac{4}{3}$ eller $x = \frac{-4}{3}$, dvs man får punkterna $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ och $(\frac{-4}{3}, \frac{-4}{3})$. Några singulära punkter finns inte.

$f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = 8$ och $f(\frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}) = -8$. Alså det största värdet är 8 och det mista är -8.

9. Vektorfält $F = (P, Q) = (xy^2 - y^3, x^3 + 4x^2y)$ är deriverbar över hela planet. Därför kan vi använda Greens sats. Låt:

$$\Omega = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$$

Greens sats ger:

$$\int_\Gamma (xy^2 - y^3)dx + (x^3 + 4x^2y)dy = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy =$$

$$= \iint_\Omega 3x^2 + 8xy - 2xy + 3y^2 dxdy = \iint_\Omega 3x^2 + 6xy + 3y^2 dxdy =$$

$$= \iint_\Omega 3(x + y)^2 dxdy$$

Ω är kvadrat med horn i punkterna $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$, och $(-2, -2)$. Den kan beskrivas som:

$$\Omega = \{(x, y) \ \ -2 \leq x + y \leq 2 \text{ och } -2 \leq x - y \leq 2\}$$

Vi ska använda följande koordinater: $u = x + y$ och $v = x - y$. Altså $x = \frac{1}{2}(u + v)$ och $y = \frac{1}{2}(u - v)$. Jakobi matrisen av den substitution är:

$$J = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

och $|\mathrm{Det}(J)| = |-1/4 - 1/4| = 1/2$.

I dem nya koordinater Ω kan beskrivas som:

$$\Omega = \{(u, v) \mid \ -2 \leq u \leq 2 \text{ och } -2 \leq v \leq 2\}$$

Vi kan konstatera att:

$$\iint_\Omega 3(x + y)^2 dxdy = \int_{u=-2}^{2} \int_{v=-2}^{2} \frac{3}{2} u^2 dudv =$$

$$= 2u^3|_{-2}^{2} = 32$$

10. Låt λ vara ett egenvärde till A och v motsvarande egenvektor. Då gäller att $Av = \lambda v$. Eftersom $A^3 = A$, så får vi att $A^3v = Av = \lambda v$ och $A^3v = AAAv = AA\lambda v = A\lambda^2 v = \lambda^3 v$ vilket innebär att $\lambda v = \lambda^3 v$. Eftersom $v \neq 0$ så är $\lambda^3 = \lambda$, alltså $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$ och $\lambda = 0$, eller $\lambda = 1$, eller $\lambda = -1$.