Tentamensskrivning, 2010-08-24, kl. 14.00-19.00.
SF1621(5B1141) och SF1619(5B1133),
Analytiska metoder och linjär algebra II.

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Preliminära betygsgränser:

- A: godkänt på alla momenten 1-5 och 14-20 p på uppgifterna 6-10
- B: godkänt på alla momenten 1-5 och 11-13 p på uppgifterna 6-10
- C: godkänt på alla momenten 1-5 och 8-10 p på uppgifterna 6-10
- D: godkänt på alla momenten 1-5 och 5-7 p på uppgifterna 6-10
- E: godkänt på alla momenten 1-5 och 3-4 p på uppgifterna 6-10
- Fx: underkänt med rätt till skriftlig komplettering. Ges för den student som antingen är godkänd på fyra av momenten 1-5 och har minst 3 poäng på uppgifterna 6-10 eller är godkänd på alla momenten 1-5 och har exakt 2 poäng på uppgifterna 6-10.
- F: underkänt utan rätt till komplettering.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydligt.

Lycka till!

1. För en inverterbar linjär avbildning $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $A(1,2) = (3,1)$ och $A^{-1}(6,7) = (-1,-1)$. Bestäm $A(1,4)$.

2. En differentierbar funktion $f(x,y)$ har gradienten:

$$grad(f) = (x+y, 2x-4y)$$

En ny funktion g definieras av $g(u,v) = f(x,y)$, där $u = 2x+y$ och $v = x-y$. Bestäm gradienten av g.

3. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till

$$f(x,y) = x^3 - y^2 - 7x^2 + 2xy + 9x + 5$$

4. Beräkna dubbelintegralen:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\; dxdy$$

då D ges av $x^2+y^2 \leq 9$, $x \geq 0$, och $y \leq 0$.

5. Visa att vektorfältet $F = (2xy, x^2 + 2yz, y^2 - 2z)$ har en potential och bestäm denna. Beräkna därefter linjeintegralen $\int_\Gamma F \cdot dr$ då Γ är kurvan $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ från $(1, 0, 0)$ till $(-1, 0, \pi)$.

6. (4pt). Beräkna flödesintegralen:

$$\iint_\Sigma (x^3 - z, y^3 - x, z^3 - y) \cdot n \; d\Sigma$$

där Σ betecknar den totala begränsningsytan till cylindern K:

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{och} \quad -1 \leq z \leq 1$$

Σ är orienterad så att enhetsnormalen n är riktad ut från cylindern K.

7. (4pt). Visa att funktionen $f(x, y) = (3x + \cos(y) + y, \cos(x) + y + 1)$ är lokalt inverterbar i varje punkt (x, y). Bestäm inversens Jacobimatris svarande mot punkten $(x, y) = (0, 0)$.

8. (4pt). Visa att funktionen:

$$f(x, y) = 3\sqrt{x - y^2} - 2\sqrt{1 - x}$$

antar ett största och ett minsta värdet och bestäm dessa värden.

9. (4pt). Beräkna $\int_\Gamma (xy^2 - y^3)dx + (x^3 + 4x^2y)dy$ där Γ är randen i positiv led till området $\Omega = \{(x, y) \mid |x| + y \leq 1 \text{ och } y \geq 0\}$.

10. (4pt). Bestäm vilken typ av kurva (ellips eller hyperbel) i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen $3x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

Lösningsförslag till tentamen, 2010-05-29, kl. 9.00-14.00. SF1621 och 5B1141, Analytiska metoder och linjär algebra II.

1. Eftersom A är inverterbar så är $A(-1,-1) = (6,7)$. Vi söker konstanter a och b så att $(1,4) = a(1,2) + b(-1,-1)$:

$$a - b = 1 \quad \text{och} \quad 2a - b = 4$$

dvs. $a = 3$ och $b = 2$. Det ger $(1,4) = 3(1,2)+2(-1,-1)$. Lineariteten av A medför att $A(1,4) = 3A(1,2) + 2A(-1,-1) = 3(3,1) + 2(6,7) = (21,17)$.

2. Vi har:

$$x = \frac{u+v}{3} \quad \text{och} \quad y = \frac{u-2v}{3}$$

Funktionen g är sammansättning $f \circ A$, där $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ges av $A(u,v) = (\frac{u+v}{3}, \frac{u-2v}{3})$. Kedjeregeln ger:

$$grad(g) = grad(f \circ A) = grad(f)J(A) = (x+y, 2x-4y) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} =$$

$$(x-y, -x+3y) = \left(\frac{u+v}{3} - \frac{u-2v}{3}, -\frac{u+v}{3} + \frac{3u-6v}{3} \right) = \left(v, \frac{2u-9v}{3} \right)$$

3. $f'_x = 3x^2 - 14x + 2y + 9$ och $f'_y = -2y + 2x$. Alltså $f'_y = 0$ om $x = y$ och $f'_x = 0$ om $3x^2 - 12x + 9 = 0$. Det händer om $3(x-3)(x-1) = 0$, d.v.s. om $x = 3$ eller $x = 1$. Vi får två kritiska punkter $(3,3)$ och $(1,1)$.

$A = f''_{xx} = 6x - 14$, $B = f''_{xy} = 2$, och $C = f''_{yy} = -2$. Alltså:

$$H_f(3,3) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}H_f(3,3) = -12 < 0 \qquad \text{Det}H_f(1,1) = 12 > 0$$

I punkten $(3,3)$ har vi $\text{Det}H_f(3,3) = -12 < 0$ och $A = 4 > 0$. Vi kan konstatera att $(3,3)$ är en **sadelpunkt**.

I punkten $(1,1)$ har vi $\text{Det}H_f(1,1) = 12 > 0$ och $A = -8 < 0$. Vi kan konstatera att $(1,1)$ är lokal **maximumpunkt**.

Funktionen f har bara en extrempunkt: en maximumpunkt i $(1,1)$.

4. Vi använder polära koordinater: $x = r\cos\alpha$ och $y = r\sin\alpha$, där $0 \le r \le 3$ och $\frac{-\pi}{2} \le \alpha \le 0$. Jakobimatrisen av den substitutionen är:

$$J = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Alltså $|\mathrm{Det}(J)| = |r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)| = r$.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy \int_{r=0}^{3}\int_{\alpha=\frac{-\pi}{2}}^{0} rr\ drd\alpha = \int_{\alpha=\frac{-\pi}{2}}^{0} d\alpha \int_{r=0}^{3} r^2 dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{r^3}{3}|_{r=0}^{3} = \frac{9\pi}{2}$$

5. Om U är en potential till F, då:

- $U_x = 2xy$ och $U = x^2y + f(y,z)$.
- $U_y = x^2 + f_y = x^2 + 2yz$. Det säger att $f_y = 2yz$ och $f = y^2z + g(z)$, vilket medför att $U = x^2y + y^2z + g(z)$.
- $U_z = y^2 + g_z = y^2 - 2z$. Det säger att $g_z = -2z$ och $g = -z^2 + C$ vilket medför att $U = x^2y + y^2z - z^2 + C$.

Vi kan konstatera att F är konservativt vektor fält och $U = x^2y + y^2z - z^2$ är en potential till F. Vi kan använda den för att beräkna linjeintegralen:

$$\int_\Gamma F \cdot dr = U(-1,0,\pi) - U(1,0,0) = -\pi^2$$

6. Man kan använda Gauss sats:

$$\iint_\Sigma (x^3-z, y^3-x, z^3-y)\cdot n\ d\Sigma = \iiint_K \mathrm{div}(x^3-z, y^3-x, z^3-y)dxdydz =$$

$$\iiint_K 3x^2+3y^2+3z^2dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 1}\int_{-1\le z\le 1} 3x^2+3y^2+3z^2dxdydz =$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}(3x^2z+3y^2z+z^3)|_{z=-1}^{z=1}dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1}(6x^2+6y^2+2)dxdy =$$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{r=0}^{1}(6r^2+2)rdr = 2\pi(\frac{3r^4}{2}+r^2)|_{r=0}^{1} = 5\pi$$

7. Vi har:

$$J_f = \begin{bmatrix} 3 & -\sin y + 1 \\ -\sin x & 1 \end{bmatrix}$$

Funktionen f är inverterbar i an omgivning av en punkt (x,y) om och endast om J_f är inverterbar i punkten. Matrisen J_f är inverterbar om och endast om $Det(J_f) = 3 - \sin(x)\sin(y) - \sin(x) \neq 0$. För att $-\sin(x)\sin(y) - \sin(x)$ kan inte vara större an 2, $Det(J_f) \neq 0$ vilket medför att funktionen f är lokalt inverterbar i en godtycklig punkt (x,y).

Jacobimatrisen för den inversa funktionen f^{-1} svarande mot punkten $(x,y) = (0,0)$ ges av:

$$J_{f^{-1}} = (J_f)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Funktionen $f(x,y)$ är definierad och kontinuerlig på den kompakta mängden $0 \leq y^2 \leq x \leq 1$. Följaktligen antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen eller i horn punker eller i en singulär punkt.

Inre punkter $0 < y^2 < x < 1$: Kritiska punkter fås ur ekvationesystemet $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Här är:

$$f'_x = \frac{3}{2\sqrt{x-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad f'_y = \frac{-3y}{\sqrt{x-y^2}}$$

alltså det finns inga inre kritiska punkter.

Randen består av två komponenter. Först, $x = 1$ och $-1 < y < 1$. Vi har $f(y) = 3\sqrt{1-y^2}$ och $f' = \frac{-3y}{\sqrt{1-y^2}}$. Alstå f har en kritisk punkt i $y = 0$. I den punkten $f(1,0) = 3$.

Andra komponenten, $y^2 = x$ och $-1 < y < 1$. Vi har $f(y) = -2\sqrt{1-y^2}$ och $f' = \frac{4y}{1-y^2}$. Alså $f' = 0$ om $y = 0$. I den punkten $f(0,0) = -2$.

Det finns två horn punkter $(1,-1)$ och $(1,1)$. I de punkterna antar f följande värden: $f(1,-1) = 0$ och $f(1,1) = 0$.

Det största värdet är 3 och det mista är -2.

9. Vektorfält $F = (P,Q) = (xy^2 - y^3, x^3 + 4x^2y)$ är deriverbar över hela planet. Därför kan vi använda Greens sats. Låt:

$$\Omega = \{(x,y) \mid |x| + y \leq 1 \text{ och } y \geq 0\}$$

Greens sats ger:

$$\int_\Gamma (xy^2 - y^3)dx + (x^3 + 4x^2y)dy = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy =$$

$$= \iint_\Omega 3x^2 + 8xy - 2xy + 3y^2 dxdy = \iint_\Omega 3x^2 + 6xy + 3y^2 dxdy =$$

$$= \iint_\Omega 3(x+y)^2 dxdy$$

Ω är triangel med horn i punkterna $(0,1)$, $(-1,0)$, och $(1,0)$. Den kan beskrivas som:

$$\Omega = \{(x,y)\ \ -1 \leq x+y \leq 1,\ -1 \leq x-y \leq 1 \text{ och } 0 \leq y\}$$

Vi ska använda följande koordinater: $u = x + y$ och $v = x - y$. Altså $x = \frac{1}{2}(u+v)$ och $y = \frac{1}{2}(u-v)$. Jakobi matrisen av den substitution är:

$$J = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

och $|\mathrm{Det}(J)| = |-1/4 - 1/4| = 1/2$.

I dem nya koordinater Ω kan beskrivas som:

$$\Omega = \{(u,v) \mid -1 \leq u \leq 1,\ -1 \leq v \leq 1, \ \text{ och } 0 \leq \frac{1}{2}(u-v)\}$$

Altså:

$$\Omega = \{(u,v) \mid -1 \leq v \leq u \leq 1\}$$

Vi kan konstatera att:

$$\iint_\Omega 3(x+y)^2 dxdy = \int_{u=-1}^{1} du \int_{v=-1}^{u} \frac{3}{2}u^2 dv =$$

$$\int_{u=-1}^{1} \frac{3}{2}u^2 v|_{v=-1}^{v=u} du = \frac{3}{2}\int_{u=-1}^{1} u^3 + u^2 du =$$

$$= \frac{3}{2}(\frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3})|_{u=-1}^{u=1} = 1$$

10. Ekvationen kan skrivas som:

$$(x,y)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

För att matrisen är symmetrisk, vi kan välja en ON bas som består av egenvektorer. Om λ_1 och λ_2 är måtsvarande egenvärdena, då ekvationen i den nya basen blir: $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 1$.

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

För att $3 > 0$, kan vi konstatera att $\lambda_1 > 0$ och $\lambda_2 > 0$. Det betyder att $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 1$ beskriver en ellips.