KTH Matematik, SF1621, Lapp nr 3, 2010-2-5. **Lösningsförslag**.

Höger. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Bestäm en matris C så att $C^{-1}AC$ är en diagonalmatris och ange denna.

Egenvärdena till A fås ur ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$. Man fr

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)+2 = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

vilket ger $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 3$. Egenvektorerna fås ur ekvationen $(A - \lambda I)v = 0$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a + b = 0 \text{ och } v_1 = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2a + b = 0 \text{ och } v_2 = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}$$

Matrisen $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ diagonaliserar matrisen A, och:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Svar: Egenverdäna: 2, 3. Egenvektorerna: $\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}$.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Vänster. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bestäm en matris C så att $C^{-1}AC$ är en diagonalmatris och ange denna.

Egenvärdena till A fås ur ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$. Man fr

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)+2 = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

vilket ger $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 3$. Egenvektorerna fås ur ekvationen $(A - \lambda I)v = 0$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ -1 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-a + 2b = 0 \text{ och } v_1 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ -1 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-a + b = 0 \text{ och } v_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Matrisen $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliserar matrisen A, och:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Svar: Egenverdäna: 2, 3. Egenvektorerna: $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$.

$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.