KTH Matematik, SF1621, Lapp nr 4, 2010-2-12. **Lösningsförslag**.

Höger. Låt $f(t) = \left((t+1)^{\frac{3}{2}}, 2(2-t)^{\frac{3}{2}}\right)$ vara en funktion av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$.

a. Bestäm en ekvation för tangenten till f i den punkt som svarar mot $t = 1$.

b. Bestäm en ekvation för normalen till f i den punkt som svarar mot $t = 1$.

c. Beräkna längden av kurvan då $0 \leq t \leq 2$.

a. $f(1) = (\sqrt{8}, 2)$
$f'(t) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{t+1}, -3\sqrt{2-t}\right)$, alltså, $f'(1) = (3/\sqrt{2}, -3)$.

Tangent linjen passar genom $f(1)$ och har riktning $f'(1)$, därför den är vinkel rätt mot $(3, 3/\sqrt{2})$. Det betyder att tangenten har ekvation $3x + \frac{3}{\sqrt{2}}y = c$, där $3\sqrt{8} + 6/\sqrt{2} = c$. Tangnet linjen har ekvation:

$$3x + \frac{3}{\sqrt{2}}y = 9\sqrt{2}$$

b. Normalen passar genom $f(1)$ och är vinkel rätt mot $f'(1) = (3/\sqrt{2}, -3)$. Det betyder att normalen har ekvation $\frac{3}{\sqrt{2}}x - 3y = c$, där $\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{8} - 6 = c$. Normalen har ekvation:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}x - 3y = 0$$

c. För $0 \leq t \leq 2$, $|f'(t)| = \sqrt{\frac{9}{4}(t+1) + 9(2-t)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{3-t}$. Längden kan beräknas på följande sätt:

$$\int_{t=0}^{2} \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{3-t}\, dt = -\sqrt{3}(3-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_{t=0}^{t=2} = -\sqrt{3} + \sqrt{3}(3^{\frac{3}{2}}) = 9 - \sqrt{3}$$

Vänster. Låt $f(t) = \big(2(2-t)^{\frac{3}{2}}, (t+1)^{\frac{3}{2}}\big)$ vara en funktion av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$.

a. Bestäm en ekvation för tangenten till f i den punkt som svarar mot $t = 1$.
b. Bestäm en ekvation för normalen till f i den punkt som svarar mot $t = 1$.
c. Beräkna längden av kurvan då $0 \leq t \leq 2$.

a. $f(1) = (2, \sqrt{8})$
$f'(t) = \big(-3\sqrt{2-t}, \frac{3}{2}\sqrt{t+1},\big)$, alltså, $f'(1) = (-3, 3/\sqrt{2})$.

Tangent linjen passar genom $f(1)$ och har riktning $f'(1)$, därför den är vinkel rätt mot $(3/\sqrt{2}, 3)$. Det betyder att tangenten har ekvation $\frac{3}{\sqrt{2}}x + 3y = c$, där $6/\sqrt{2} + 3\sqrt{8} = c$. Tangnet linjen har ekvation:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}x + 3y = 9\sqrt{2}$$

b. Normalen passar genom $f(1)$ och är vinkel rätt mot $f'(1) = (-3, 3/\sqrt{2})$.. Det betyder att normalen har ekvation $-3x + \frac{3}{\sqrt{2}}y = c$, där $-6 + \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{8} = c$. Normalen har ekvation:

$$-3x + \frac{3}{\sqrt{2}}y = 0$$

c. För $0 \leq t \leq 2$, $|f'(t)| = \sqrt{9(2-t) + \frac{9}{4}(t+1)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{3-t}$. Längden kan beräknas på följande sätt:

$$\int_{t=0}^{2} \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{3-t}\, dt = -\sqrt{3}(3-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_{t=0}^{t=2} = -\sqrt{3} + \sqrt{3}(3^{\frac{3}{2}}) = 9 - \sqrt{3}$$