KTH Matematik, SF1621, Lapp nr 7, 2010-3-5. **Lösningsförslag**.

Höger. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen:

$$f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy$$

Funktionen f är differentierbar för alla punkter (x, y) i planet. Altså lokala extrempunkter till f är bland kritiska punkter.

Kritiska punkter till f uppfuller ekvationer:

$$f'_x = 3x^2 + 12x - 12y = 0 \qquad f'_y = 6y - 12x = 0$$

Altså:

$$y = 2x \quad 3x^2 - 12x = 0$$

och därför är $(0, 0)$ och $(4, 8)$ kritiska punkter till f.

För att bestämma om en kritisk punkt är extrem, analyserar vi partiella derivatyor av andra grad:

$$f''_{xx} = 6x + 12 \qquad f''_{xy} = -12 \qquad f''_{yy} = 6$$

Altså:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(0, 0) & f''_{xy}(0, 0) \\ f''_{yx}(0, 0) & f''_{yy}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$$

För att $f''_{xx}(0, 0) = 12 > 0$ och $\mathrm{Det}(H_f(0, 0)) = -72 < 0$, punkten $(0, 0)$ är en sadelpunkt (och inte en extrempunkt).

$$H_f(4, 8) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(4, 8) & f''_{xy}(4, 8) \\ f''_{yx}(4, 8) & f''_{yy}(4, 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$$

För att $f''_{xx}(4, 8) = 36 > 0$ och $\mathrm{Det}(H_f(4, 8)) = 72 > 0$, punkten $(4, 8)$ är lokalt minimum.

Vänster. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen:

$$f(x,y) = 3x^2 + y^3 + 6y^2 - 12xy$$

Funktionen f är differentierbar för alla punkter (x,y) i planet. Altså lokala extrempunkter till f är bland kritiska punkter.

Kritiska punkter till f uppfuller ekvationer:

$$f'_x = 6x - 12y = 0 \qquad f'_y = 3y^2 + 12y - 12x = 0$$

Altså:

$$x = 2y \quad 3y^2 - 12y = 0$$

och därför är $(0,0)$ och $(8,4)$ kritiska punkter till f.

För att bestämma om en kritisk punkt är extrem, analyserar vi partiella derivatyor av andra grad:

$$f''_{xx} = 6 \qquad f''_{xy} = -12 \qquad f''_{yy} = 6y + 12$$

Altså:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

För att $f''_{xx}(0,0) = 6 > 0$ och $\mathrm{Det}(H_f(0,0)) = -72 < 0$, punkten $(0,0)$ är en sadelpunkt (och inte en extrempunkt).

$$H_f(8,4) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(8,4) & f''_{xy}(8,4) \\ f''_{yx}(8,4) & f''_{yy}(8,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 36 \end{pmatrix}$$

För att $f''_{xx}(8,4) = 36 > 0$ och $\mathrm{Det}(H_f(8,4)) = 72 > 0$, punkten $(8,4)$ är lokalt minimum.