KTH Matematik, SF1621, Lapp nr 6, 2010-2-26. **Lösningsförslag**.

Höger. Visa att det i en omgivning av punkten $(0, -2, 2)$ finns precis en funktion $z = z(x, y)$ som uppfyller ekvationen:

$$z^3 + 4xyz - 5x^2 + 4y = 0$$

och sådan att $z(0, -2) = 2$. Bestäm gradienten $\mathrm{grad}(z)$ i punkten $(0, -2)$.

Låt $F(x, y, z) = z^3 + 4xyz - 5x^2 + 4y$. Vi har att:

$$F(0, -2, 2) = 0 \qquad F'_z = 3z^2 + 4xy$$

Altså $F'_z(0, -2, 2) = 12 \neq 0$, vilket bevisar existensen av en sådan funktion.

Om vi deriverar equationen $z^3 + 4xyz - 5x^2 + 4y = 0$ respective x, får vi:

$$0 = (z^3 + 4xyz - 5x^2 + 4y)'_x = 3z^2 z'_x + 4yz + 4xyz'_x - 10x$$

$$z'_x = \frac{10x - 4yz}{3z^2 + 4xy}$$

I punkten $(x, y, z) = (0, -2, 2)$ det blir:

$$z'_x(0, -2) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Om vi deriverar equationen $z^3 + 4xyz - 5x^2 + 4y = 0$ respective y, får vi:

$$0 = (z^3 + 4xyz - 5x^2 + 4y)'_y = 3z^2 z'_y + 4xz + 4xyz'_y + 4$$

$$z'_y = \frac{-4 - 4xz}{3z^2 + 4xy}$$

I punkten $(x, y, z) = (0, -2, 2)$ det blir:

$$z'_y(0, -2) = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$$

Vi kan konstatera:

$$\mathrm{grad}(z)(0, -2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

Vänster. Visa att det i en omgivning av punkten $(0, -2, 2)$ finns precis en funktion $z = z(x, y)$ som uppfyller ekvationen:

$$z^3 + 2xyz - 5x^2 + 2y - 4 = 0$$

och sådan att $z(0, -2) = 2$. Bestäm gradienten $\text{grad}(z)$ i punkten $(0, -2)$.

Låt $F(x, y, z) = z^3 + 2xyz - 5x^2 + 2y - 4$. Vi har att:

$$F(0, -2, 2) = 0 \qquad F'_z = 3z^2 + 2xy$$

Altså $F'_z(0, -2, 2) = 12 \neq 0$, vilket bevisar existensen av en sådan funktion.

Om vi deriverar equationen $z^3 + 2xyz - 5x^2 + 2y - 4 = 0$ respective x, får vi:

$$0 = (z^3 + 2xyz - 5x^2 + 2y - 4)'_x = 3z^2 z'_x + 2yz + 2xyz'_x - 10x$$

$$z'_x = \frac{10x - 2yz}{3z^2 + 2xy}$$

I punkten $(x, y, z) = (0, -2, 2)$ det blir:

$$z'_x(0, -2) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Om vi deriverar equationen $z^3 + 2xyz - 5x^2 + 2y - 4 = 0$ respective y, får vi:

$$0 = (z^3 + 2xyz - 5x^2 + 2y - 4)'_y = 3z^2 z'_y + 2xz + 2xyz'_y + 2$$

$$z'_y = \frac{-2 - 2xz}{3z^2 + 2xy}$$

I punkten $(x, y, z) = (0, -2, 2)$ det blir:

$$z'_y(0, -2) = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$$

Vi kan konstatera:

$$\text{grad}(z)(0, -2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{6}\right)$$