KTH Matematik, SF1621, Lapp nr 13, 2010-5-07. **Lösningsförslag**.

Höger. Beräkna flödesintegralen:

$$\iint_\Sigma (x-2y, x+2y, 2z-y)\cdot n \; d\Sigma$$

där Σ är den del av paraboloiden $z = x^2+2y^2$ som ligger ovanför rektangeln $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Orintering väljs så att en normal vector har negative z-komponent.

$R(x,y) = (x, y, x^2+2y^2)$, där $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, är parametrisering av ytan.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = (1,0,2x)$$
$$\frac{\partial R}{\partial y} = (0,1,4y)$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} \times \frac{\partial R}{\partial y} = (-2x,-4y,1)$$

Den har olika riktnig an orientering.

$$\iint_\Sigma (x-2y, x+2y, 2z-y)\cdot n \; d\Sigma =$$

$$-\iint_{0\le x\le 1, 0\le y\le 1} (x-2y, x+2y, 2(x^2+2y^2)-y)\cdot(-2x,-4y,1)dxdy =$$

$$-\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} -2x^2+4xy-4xy-8y^2+2x^2+4y^2-y \; dxdy =$$

$$-\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} -4y^2-y \; dxdy = \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^2}{2}|_{y=0}^{1} = \frac{11}{6}$$

Vänster. Beräkna flödesintegralen:

$$\iint_\Sigma (x - 2y, 4x + 2y, 2z - y) \cdot n \; d\Sigma$$

där Σ är den del av paraboloiden $z = 2x^2 + y^2$ som ligger ovanför rektangeln $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Orintering väljs så att en normal vector har negative z-komponent.

$R(x, y) = (x, y, 2x^2 + y^2)$, där $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, är parametrisering av ytan.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = (1, 0, 4x)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} \times \frac{\partial R}{\partial y} = (-4x, -2y, 1)$$

Den har olika riktnig an orientering.

$$\iint_\Sigma (x - 2y, 4x + 2y, 2z - y) \cdot n \; d\Sigma =$$

$$-\iint_{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1} \big(x - 2y, 4x + 2y, 2(2x^2 + y^2) - y\big) \cdot (-4x, -2y, 1) dxdy =$$

$$-\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} -4x^2 + 8xy - 8xy - 4y^2 + 4x^2 + 2y^2 - y \; dxdy =$$

$$-\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} -2y^2 - y \; dxdy = \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^2}{2}|_{y=0}^{1} = \frac{7}{6}$$