KTH Matematik, SF1621, Lapp nr 12, 2010-4-30. **Lösningsförslag**.

Höger. Beräkna linjeintegralen:

$$\int_\Gamma (2x^2+2xy)dx + (x^2-y^2)dy$$

där Γ är kurva $5x^6+3y^4=5$, $y \leq 0$, från punkten $(-1,0)$ till punkten $(1,0)$.

Låt $P = 2x^2+2xy$ och $Q = x^2-y^2$. Vektor fältet $F=(P,Q)$ är definierad över hela $\mathbf{R}^2$ som är ett enkelt sammanhängande område.

För att $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $F=(P,Q)$ är konservativt. Det betyder att linjeintegralen är oberoende av valet av kurvan från $(-1,0)$ till $(1,0)$. Vi kan integrera längst $r(t)=(t,0)$ för $-1\leq t\leq 1$.

$$\int_\Gamma (2x^2+2xy)dx + (x^2-y^2)dy = \int_{t=-1}^{1} 2t^2 dt = \frac{2t^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{-2}{3} = \frac{4}{3}$$

Vänster. Beräkna linjeintegralen:

$$\int_\Gamma (x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy$$

där Γ är kurva $5x^6 + 3y^4 = 3$, $x \leq 0$, från punkten $(0, -1)$ till punkten $(0, 1)$.

Låt $P = x^2 + 2xy$ och $Q = x^2 - y^2$. Vektor fältet $F = (P, Q)$ är definierat över hela $\mathbf{R}^2$ som är ett enkelt sammanhängande område.

För att $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $F = (P, Q)$ är konservativt. Det betyder att linjeintegralen är oberoende av valet av kurvan från $(0, -1)$ till $(0, 1)$. Vi kan integrera längst $r(t) = (0, t)$ för $-1 \leq t \leq 1$.

$$\int_\Gamma (x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = \int_{t=-1}^{1} -t^2 dt = \frac{-t^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{-1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{3}$$