KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2008–12–18, kl. 8.00–13.00.

SF1618, 5B1132, Analytiska metoder och linjär algebra 1.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd. Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng.

Preliminära betygsgränser
A: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
Fx: underkänt med rätt till skriftlig komplettering
F: underkänt utan rätt till komplettering

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. Lös matrisekvationen

$$\boldsymbol{A}X = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

där

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Lös ekvationen

$$z^2 + 6z + 6 - 4\mathrm{i} = 0.$$

Lösningarna skall anges på formen $a + b\mathrm{i}$ där a och b är reella.

3. Betrakta funktionen

$$f(x) = x - 4\sqrt{x-1} + 4,$$

där $2 \le x \le 17$.

a. Verifiera att f har lokal minimum i punkten $x = 5$.

b. Bestäm största och minsta värdena till f.

4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 4y' + 13y = 13x - 9.$$

5. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvan

$$y = (x-2)\sqrt{3-x}$$

och x–axeln.

V.g.vänd

6. Beräkna integralen

$$\int_2^3 \frac{1}{x + 1 + 4\sqrt{x - 2}}\, dx \qquad (4p)$$

7. Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x - \ln(x + 2), \quad \text{där} \quad x \geq 1.$$

Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till f. Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = 0$? (4p)

8. En rät linje går genom punkten $(1,2)$ och bildar med de positiva koordinataxlarna en triangel. Bestäm den minsta möjliga arean av en sådan triangel. (4p)

9. Älgjägaren Alban skjuter ett skott mot något som rör sig i skogsbrynet och som måste vara en älg. Projektilens läge vid tiden t beskrivs av $(1, 7 + 3t, 6 + 3t)$. Skogsvaktaren Bertil som hopkurad lunkar i skogsbrynet kan beskrivas som ett klot med radien $\frac{2}{3}$ och centrum i $(5 + 2t, 3 + t, 5 + 2t)$. Hur går det för Bertil? (4p)

10. Beräkna summan

$$\sum_{k=0}^{47} (-1)^k \binom{95}{2k}.$$

Ledning: Använd binomialsatsen. (4p)

Lycka till och God Jul!

Lösningsförslag, resultatlistan och information om kömpletteringen kommer att läggas ut på kurssidan.

1. Vi söker inversen till $\boldsymbol{A}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 - r_2 \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2 - 2r_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

alltså $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ och vi får

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$

---

2. Kvadratkomplettera och förenkla:

$$z^2 + 6z + 6 - 4\mathrm{i} = z^2 + 2 \cdot 3z + 3^2 - 3^2 + 6 - 4\mathrm{i} = (z + 3)^2 - 3 - 4\mathrm{i}.$$

Ekvationen kan skrivas på formen $(z + 3)^2 = 3 + 4\mathrm{i}$. Sätt $z + 3 = a + b\mathrm{i}$, där a och b är reella:

$$(a + b\mathrm{i})^2 = 3 + 4\mathrm{i} \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i} = 3 + 4\mathrm{i}.$$

Detta innebär att

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & \Rightarrow a^2 - 4/a^2 = 3 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \; a_1 = 2,\; a_2 = -2 \\ \quad 2ab = 4 \;\Rightarrow b = 2/a & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_1 = 1,\; b_2 = -1 \end{cases}$$

alltså $z_1 + 3 = 2 + \mathrm{i}$, $z_2 + 3 = -2 - \mathrm{i}$ dvs $z_1 = -1 + \mathrm{i}$, $z_2 = -5 - \mathrm{i}$

Svar: $-1 + \mathrm{i}$ och $-5 - \mathrm{i}$.

3a. Funktionen $f(x) = x - 4\sqrt{x - 1} + 4$ är deriverbar på intervallet $2 \le x \le 17$ och vi har

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{2\sqrt{x-1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^{3/2}}$$

Man får $f'(5) = 0$ och $f''(5) > 0$ vilket innebär att f har lokal minimum i punkten $x = 5$.

3b. Funktionen f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $2 \le x \le 17$ vilket medför att f antar ett största och ett minsta värde på intervallet. Eftersom f är deriverbar så antas dessa värden antingen i en kritisk punkt eller i en ändpunkt på intervallet.
Kritiska punkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$:

$$1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x-1} = 2 \;\Leftrightarrow\; x - 1 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = 5$$

De aktuella punkterna är $x = 2, x = 5$ och $x = 17$. I dessa punkter antar f värdena $f(2) = 2, f(5) = 1$ och $f(17) = 5$ alltså minsta värdet = 1 och största värdet = 5.

Svar: minsta värdet = 1 och största värdet = 5.

---

4. Karakteristisk ekvation är här $r^2 + 4r + 13 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r + 2)^2 = -9 \;\Leftrightarrow\; r = -2 \pm 3\mathrm{i}$. Följaktligen är $y_h = (A \cos 3x + B \sin 3x)\mathrm{e}^{-2x}$ den allmänna lösningen till ekvationen $y'' + 4y' + 13y = 0$.
Betrakta ekvationen $y'' + 4y' + 13y = 13x - 9$. Ansats $y = ax + b$ ger $y' = a$, $y'' = 0$ vilket, insatt i ekvationen, ger $4a + 13(ax + b) = 13x - 9 \Leftrightarrow 13ax + 4a + 13b = 13x - 9$.

Eftersom detta skall vara en identitet så måste koefficienterna för respektive x–potenser vara lika: $13a = 13$ och $13b + 4a = -9 \Leftrightarrow a = 1$ och $b = -1$ vilket innebär att $y_p = x - 1$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$ dvs $y = (A \cos 3x + B \sin 3x)e^{-2x} + x - 1$.

$\boxed{\textbf{Svar: } y = (A \cos 3x + B \sin 3x)e^{-2x} + x - 1.}$

---

5. Kurvan $y = (x - 2)\sqrt{3 - x}$ skär x–axeln då $(x - 2)\sqrt{3 - x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ eller $x = 3$. För $2 \le x \le 3$ är $(x - 2)\sqrt{3 - x} \ge 0$ dvs kurvan ligger ovanför x–axeln. Arean ges av

$$\int_2^3 (x - 2)\sqrt{3 - x}\,dx = \{ \text{ subst. } \sqrt{3 - x} = t,\ 3 - x = t^2, x = 3 - t^2, dx = -2t\,dt, t: 1 \to 0 \ \} =$$

$$= \int_1^0 (1 - t^2)t\,(-2t)\,dt = \int_1^0 (2t^4 - 2t^2)\,dt = \Big[2t^5/5 - 2t^3/3\Big]_1^0 = -2/5 + 2/3 = 4/15.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 4/15.}$

---

6. $$\int_2^3 \frac{1}{x + 1 + 4\sqrt{x - 2}}\,dx = \{ \sqrt{x - 2} = t,\ x = t^2 + 2,\ dx = 2t\,dt \} = \int_0^1 \frac{2t}{t^2 + 4t + 3}\,dt = \int_0^1 \frac{2t}{(t + 1)(t + 3)}\,dt =$$

$$= \{\text{uppdelning i partialbråk }\} = \int_0^1 \left(\frac{3}{t + 3} - \frac{1}{t + 1}\right)dt = \Big[\,3 \ln(t + 3) - \ln(t+1)\Big]_0^1 =$$

$$= 3 \ln 4 - \ln 2 - 3 \ln 3 + \ln 1 = 5 \ln 2 - 3 \ln 3.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 5 \ln 2 - 3 \ln 3.}$

---

7. Vi har

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 2} = \frac{x - 2}{(x + 2)x^2}$$

och ur ekvationen $f'(x) = 0$ fås den enda kritiska punkten $x = 2$. På intervallet $1 \le x < 2$ är $f'(x) < 0$ medan $f'(x) > 0$ för alla $x > 2$. Detta innebär att f har lokal (även global) minimum i punkten $x = 2$ och lokal maximum i punkten $x = 1$. Dessutom gäller att

$$f(1) = 1 - \ln 3 < 0 \ \text{ och}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{x}{x + 2}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{1 + 2/x}\right) = 0$$

vilket medför att det inte finns någon lösning till ekvationen.

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{lokal maximum i pukten } x = 1, \text{ lokal minimum i punkten } x = 2. \text{ Ingen lösning.}}$

---

8. Linjens ekvation har formen $y = ax + b$. Skärningspunkterna med koordinataxlarna är $(-b/a,\ 0)$ och $(0,b)$. Den triangel som bildas har arean $\pm A = \dfrac{-b^2}{2a}$. Eftersom punkten $(1,2)$ ligger på linjen så är $2 = a + b$ dvs $b = 2 - a$ och $A = \dfrac{-(2 - a)^2}{2a}$. Kritiska punkter till A fås ur ekvationen $A' = 0$. Man får $A' = \dfrac{(2 - a)(2 + a)}{a^2}$ och kritiska punkter är $a = \pm 2$. Eftersom punkterna $(-b/a,\ 0)$ och $(0,b)$ skall ligga i första kvadranten så måste $a = -2$. Motsvarande arean är $A = 4$. Av uppgiftens geometriska karaktär framgår att detta är det minsta värdet som antas av funktionen A.

$\boxed{\textbf{Svar: } 4.}$

---

9. Vid tiden t ges avståndet mellan projektilen och klotets centrum av

$$|(1,\ 7 + 3t,\ 6 + 3t) - (5 + 2t,\ 3 + t,\ 5 + 2t)|$$

dvs

$$\sqrt{(-4-2t)^2+(4+2t)^2+(1+t)^2}.$$

Bertil klarar sig oskadat om

$$\sqrt{(-4-2t)^2+(4+2t)^2+(1+t)^2} > \frac{2}{3}$$

efter kvadrering och förenkling

$$9t^2+34t+\frac{293}{9} > 0.$$

vilket är sant eftersom $34^2-4\cdot 9\cdot\dfrac{293}{9} < 0.$

Svar: Han klarar sig.

---

10. Vi har

$$(1+\mathrm{i})^{95}=\sum_{k=0}^{95}\binom{95}{k}\mathrm{i}^k=\sum_{k=0}^{47}\binom{95}{2k}\mathrm{i}^{2k}+\sum_{k=0}^{47}\binom{95}{2k+1}\mathrm{i}^{2k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{47}(-1)^k\binom{95}{2k}+\sum_{k=0}^{47}(-1)^k\binom{95}{2k+1}\mathrm{i}. \tag{1}$$

Å andra sidan

$$(1+\mathrm{i})^{95}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{95}=$$

$$=(\sqrt{2})^{95}\left(\cos\frac{95\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{95\pi}{4}\right)=$$

$$=(\sqrt{2})^{95}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=2^{27}-2^{47}\mathrm{i} \tag{2}$$

och identifiering av real– respektive imaginärdelar i (1) och (2) ger att

$$\sum_{k=0}^{47}(-1)^k\binom{95}{2k}=2^{47}.$$

Svar: 2^{47}.

---

8. Bestäm en ekvation för ett plan vars punkter ligger lika långt från de två planen

$$4y + 3z = 1$$

och

$$2x + 2y + z = 3.$$

8. De punkter (x,y,z) som ligger lika långt från de båda givna planen uppfyller ekvationen

$$\frac{|4y + 3z - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|2x + 2y + z - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}$$

dvs

$$\frac{4y + 3z - 1}{5} = \pm\frac{2x + 2y + z - 3}{3}$$

vilket ger

$$5x - y - 2z = 6$$

och

$$5x + 11y + 7z = 9$$

Svar: $5x - y - 2z = 6$ och $5x + 11y + 7z = 9$.

---

9. En försäljare har kommit fram till att antalet, y, sålda produkter beror på försäljningspriset, x, enligt

$$y(x) = \frac{10}{1 + x^2}.$$

Hur skall priset väljas för att maximera totala intäkten av sålda produkter? (4p)

9. Den totala intäkten, I, av sålda produkter är $I(x) = xy(x)$, $x \geq 0$. Dess derivata blir

$$I' = \frac{10}{1 + x^2} - \frac{20x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{10(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

som har nollstället $x = 1$. Vi ser att $I'(x) > 0$ då $0 \leq x < 1$ och $I'(x) < 0$ då $x > 1$ vilket visar att I har ett globalt maximumvärde $I(1) = 5$ och det optimala priset är $x = 1$.

Svar: $x = 1$.

---

6. Beräkna integralen

$$\int_2^3 \frac{1}{x+1+4\sqrt{x-2}}\,dx \qquad (4p)$$

6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x+1+4\sqrt{x-2}}\,dx = \{\, \sqrt{x-2}=t,\ x=t^2+2,\ dx = 2t\,dt \,\} = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+4t+3}\,dt = \int_0^1 \frac{2t}{(t+1)(t+3)}\,dt =$

$= \{\text{uppdelning i partialbråk}\} = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{3}{t+3} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \Big[3\ln(t+3) - \ln(t+1)\Big]_0^1 =$

$= 3\ln 4 - \ln 2 - 3\ln 3 + \ln 1 = 5\ln 2 - 3\ln 3.$

Svar: $5\ln 2 - 3\ln 3.$

---

7. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen

$$f(x) = \frac{3x^2+2x+8}{x^2+3x+2},\ x > 0. \qquad (4p)$$

Vi har

$$f'(x) = \frac{(6x+2)(x^2+3x+2) - (3x^2+2x+8)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} =$$

$$= \frac{7x^2-4x-20}{(x^2+3x+2)^2}$$

och ekvationen $f'(x) = 0$ ger för $x > 0$ en lösning $x = 2$.
På intervallet $0 < x < 2$ är $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ är strängt avtagande på detta intervall.
På intervallet $x > 2$ är $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ är strängt växande på detta intervall.
Sammanfattningsvis får man att $x = 2$ är en lokal minimipunkt för f.

Svar allmänt: Lok. min. i $x = 2$.

---

3. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = \dfrac{1}{48-x}$ och $y = \dfrac{1}{\sqrt{280-6x}}$ roterar ett varv kring x–axeln.

Kurvorna $y = \dfrac{1}{48-x}$ och $y = \dfrac{1}{\sqrt{280-6x}}$ skär varandra

$$\frac{1}{48-x} = \frac{1}{\sqrt{280-6x}} \qquad (*)$$

Ledvis kvadrering ger ekvationen $(48-x)^2 = 280-6xx^2 - 30x + 224 = 0 \Leftrightarrow x = 14, x = 16$. Vi kontrollerar (pga kvadreringen) att dessa punkter uppfyller ekvationen (*).

På intervallet $44 \le x \le 46$ är $0 < \dfrac{1}{\sqrt{280-6x}} \le \dfrac{1}{48-x}$. Volymen ges av

$$\pi \int_{44}^{46} \frac{1}{(48-x)^2}\,dx - \pi \int_{44}^{46} \frac{1}{(\sqrt{280-6x})^2}\,dx = \pi \left[\frac{1}{48-x} + \frac{1}{6}\ln(280-6x)\right]_{44}^{46} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\ln 2.$$

Svar allmänt: $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\ln 2.$