KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2008–08–26, kl. 14.00–19.00.

SF1619/5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd. Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng.

Preliminära betygsgränser
A: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
Fx: underkänt med rätt till skriftlig kompletterering
F: underkänt utan rätt till kompletterering

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. Komplettera $\boldsymbol{u} = (1,1,-3)$ och $\boldsymbol{v} = (1,-1,3)$ med en vektor $\boldsymbol{w}$ sådan att $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ blir en bas för $\mathbf{R}^3$.

2. En differentierbar funktion $f(x,y)$ har gradienten
$$\operatorname{grad} f = (x + 2y,\ 2x - 4y).$$
En ny funktion g definieras av $g(u,v) = f(x,y)$, där $u = 2x - y$ och $v = y - x$. Bestäm gradienten av g.

3. Bestäm Taylorpolynomet av gradtal två till funktionen
$$f(x,y) = e^{x-y} + \frac{1}{2y - x}$$
i punkten $(1,1)$.

4. Beräkna arean av del av ytan
$$3z = 3y + 2(x-2)^{3/2}$$
vars projektion på xy–planet ges av $4 \le x \le 9$, $0 \le y \le 3$.

5. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_{\mathbf{S}} (z,y,x) \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\, dS$$
då $\mathbf{S}$ är den del av planet $x + y + z = 2$ där $x \ge 0$, $y \ge 0$ och $z \ge 0$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{N}}$ har positiva komponenter.

V.g.vänd

6. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma (x^2 + y)\,\mathrm{d}x + (y^2 + x)\,\mathrm{d}y$$

då Γ går från $(0,0)$ till $(2,-1)$ längs kurvan $x^2 + y = y^2 + x$. (4p)

7. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{y}{(2 + xy)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

då $\mathbf{D}$ är det ändliga område som begränsas av hyperbeln $xy = 2$ samt linjerna $x = 1$, $x = 2$ och $y = 0$. (4p)

8. Beräkna ytintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (1 + x + y)z\,\mathrm{d}S$$

då $\mathbf{S}$ är halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$. (4p)

9. Visa att

$$\frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b} \geq 1,$$

om $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ och $xy = 1$ då $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$ och $y > 0$. (4p)

10. Beräkna $u''_{xx}(0,0)$ då

$$u(x,y) = \iint_{\mathbf{D}_{xy}} \cos(t^2 + s^2)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s,$$

och $\mathbf{D}_{xy}$ ges av $0 \leq t \leq x,\ t - x + y \leq s \leq x + y - t$. (4p)

1. Låt t.ex $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (0,0,-2)$. Då är vektorerna $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ linjärt oberoende. Tre linjärt oberoende vektorer i $\mathbf{R}^3$ utgör en bas.

Svar: Till exempel $\boldsymbol{w} = (0,0,-2)$.

---

2. Vi har

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + v \\ y = u + 2v \end{cases}$$

samt $\operatorname{grad} f = (x + 2y,\ 2x - 4y) = (f'_x,\ f'_y)$. Kedjeregeln ger

$$g'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = (x + 2y)\cdot 1 + (2x - 4y)\cdot 1 = 3x - 2y = 3(u + v) - 2(u + 2v) = u - v$$

och

$$g'_v = f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v = (x + 2y)\cdot 1 + (2x - 4y)\cdot 2 = 5x - 6y = 5(u + v) - 6(u + 2v) = -u - 7v,$$

alltså

$$\operatorname{grad} g = (g'_u,\ g'_v) = (u - v,\ -u - 7v).$$

Svar: $(u - v,\ -u - 7v)$

---

3. $f(x,y) = e^{x-y} + \dfrac{1}{2y - x} = \{\, x = 1 + h,\ \ y = 1 + k \,\} = e^{h-k} + \dfrac{1}{1 + 2k - h} =$

$= \{\, h - k = s,\ \ 2k - h = t \,\} = e^s + (1 + t)^{-1} = 1 + s + \dfrac{1}{2}s^2 + O(s^3) + 1 - t + t^2 + O(t^3) =$

$= 1 + (h - k) + \dfrac{1}{2}(h - k)^2 + 1 - (2k - h) + (2k - h)^2 + O(s^3) + O(t^3) =$

$= 2 + 2h - 3k + \dfrac{3}{2}h^2 - 5hk + \dfrac{9}{2}k^2 + O(s^3) + O(t^3),$

alltså

Svar: $2 + 2h - 3k + \dfrac{3}{2}h^2 - 5hk + \dfrac{9}{2}k^2$, där $h = x - 1$ och $k = y - 1$

---

4. Låt $\mathbf{D}$ vara rektangeln $4 \le x \le 9,\ 0 \le y \le 3$. Vi har

$$z = y + \frac{2}{3}(x - 2)^{3/2}$$

$$z'_x = \sqrt{x - 2}$$

$$z'_y = 1$$

och

$$\text{Arean} = \iint_{\mathbf{D}} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dx\,dy = \iint_{\mathbf{D}} \sqrt{x}\,dx\,dy = \int_4^9 \sqrt{x}\,dx \int_0^3 dy = \left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_4^9 \cdot \left[y\right]_0^3$$

Svar: 38.

---

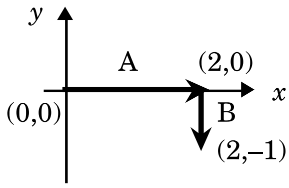
5. $\mathbf{S}$ ges av $z = 2 - x - y \Rightarrow \hat{\boldsymbol{N}}\,dS = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)\,dx\,dy = (1,1,1)\,dx\,dy$. Vid projektionen av $\mathbf{S}$ på xy–planet fås triangeln $\mathbf{D}$ med hörnen i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,2)$.

$$\iint_{\mathbf{S}} (z,y,x) \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (2 - x - y, y, x) \cdot (1,1,1)\,dx\,dy = \iint_{\mathbf{D}} 2\,dx\,dy = 2 \cdot \text{arean av } \mathbf{D} = 4.$$

Svar: 4.

---

6. Funktionerna $P(x,y) = x^2 + y$ och $Q(x,y) = y^2 + x$, saknar singulära punkter och $P'_y = 1 = Q'_x$. Detta medför att linjeintegralen är oberoende av integrationsvägen. Med **A** och **B** enligt figuren har vi



$$\int_{\mathbf{A}} = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3},$$

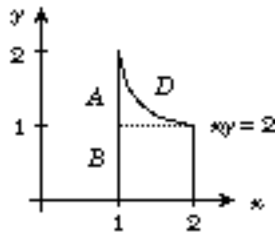
$$\int_{\mathbf{B}} = \int_0^{-1} (y^2 + 2)\,dy = \left[\frac{y^3}{3} + 2y\right]_0^{-1} = -\frac{7}{3},$$

$$\int_{\Gamma} = \int_{\mathbf{A}} + \int_{\mathbf{B}} = \frac{1}{3}.$$

Svar: $\frac{1}{3}$.

---

7. Med beteckningarna enligt figuren har vi



$$\iint_{\mathbf{D}} = \iint_{\mathbf{A}} + \iint_{\mathbf{B}}.$$

Man får

$$\iint_{\mathbf{B}} \frac{y}{(2+xy)^2}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_1^2 \frac{y}{(2+xy)^2}\,dx = \int_0^1 \left[\frac{-1}{2+xy}\right]_1^2 dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{-1}{2+2y} - \frac{-1}{2+y}\right) dy = \left[-\frac{1}{2}\ln(1+y) + \ln(2+y)\right]_0^1 = \ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2.$$

och

$$\iint_{\mathbf{A}} \frac{y}{(2+xy)^2}\,dxdy = \int_1^2 dy \int_1^{2/y} \frac{y}{(2+xy)^2}\,dx = \int_1^2 \left[\frac{-1}{2+xy}\right]_1^{2/y} dy =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{-1}{2+2} - \frac{-1}{2+y}\right) dy = \left[\frac{-y}{4} + \ln(2+y)\right]_1^2 = 2\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{4}.$$

Svar: $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$.

---

8. **S** ges av $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ där $x^2 + y^2 \le 1$ (**D**). Vi har

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$z'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$\iint_{\mathbf{S}} (1+x+y)z\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (1+x+y)\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (1+x+y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbf{D}} dx\,dy + \iint_{\mathbf{D}} (x+y)\,dx\,dy = \{\text{ symmetri m a p } x+y=0 \} =$$

$= $ arean av **D** $+ 0 = \pi$.

Svar: π.

---

9. Sök extremvärden för funktionen $f(x,y) = \frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b}$ under bivillkoret $g(x,y) = xy - 1 = 0$.

Låt $F = f - tg$. Vi har

$$\begin{cases} F'_x = x^{a-1} - ty = 0 \\ F'_y = y^{b-1} - tx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^a - txy = 0 \\ y^b - txy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^a - t = 0 \\ y^b - t = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = t^{1/a},\ y = t^{1/b} \Rightarrow 1 = xy = t^{1/a}t^{1/b} = t^{1/a + 1/b} = t$$

alltså $t = 1$ och därmed $x = t^{1/a} = 1,\ y = t^{1/b} = 1.$

Systemet $g'_x = g'_y = g = 0 \Leftrightarrow y = x = xy - 1 = 0$ är orimlig.

Den kontinuerliga funktionen $f(x,y)$ växer obegränsat då x och/eller y gör det. Den är positiv då $xy = 1,\ x > 0,\ y > 0$ och har där ett minimum, som måste komma fram med Lagranges multiplikatormetod, som ger att $\min = f(1,1) = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1.$ Detta medför att $f(x,y) = \dfrac{x^a}{a} + \dfrac{y^b}{b} \geq f(1,1) = 1.$

---

10. Vi har

$$f(t,s) = \cos(t^2 + s^2)$$

och

$$u(x,y) = \iint_{\mathbf{D}_{xy}} f(t,s)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_0^x \mathrm{d}t \int_{t-x+y}^{x+y-t} f(t,s)\,\mathrm{d}s.$$

Man får

$$u'_x = \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{t-x+y}^{x+y-t} f(t,s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t + \int_{x-x+y}^{x+y-x} f(x,s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^x \left(\int_{t-x+y}^{x+y-t} \frac{\partial}{\partial x} f(t,s)\,\mathrm{d}s + f(t,x+y-t) + f(t,t-x+y) \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^x \big(f(t,x+y-t) + f(t,t-x+y) \big)\,\mathrm{d}t$$

och

$$u''_{xx} = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \big(f(t,x+y-t) + f(t,t-x+y) \big)\,\mathrm{d}t + f(x,x+y-x) + f(x,x-x+y)\big).$$

I punkten $(0,0)$ fås

$$u''_{xx} = \int_0^0 \frac{\partial}{\partial x} \big(f(t,x+y-t) + f(t,t-x+y) \big)\,\mathrm{d}t + 2f(0,0) = 2f(0,0) = 2.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 2.}$
