

Tentamensskrivning, 2008-05-19, kl. 8.00-13.00.

SF1619, Analytiska metoder och linjär algebra 2.

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd. Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng.

Preliminära betygsgränser

A: godkänt på alla momenten 1-5 och 14-20 poäng på uppgifterna 6-10

B: godkänt på alla momenten 1-5 och 11-13 poäng på uppgifterna 6-10

C: godkänt på alla momenten 1-5 och 8-10 poäng på uppgifterna 6-10

D: godkänt på alla momenten 1-5 och 5-7 poäng på uppgifterna 6-10

E: godkänt på alla momenten 1-5 och 3-4 poäng på uppgifterna 6-10

Fx: underkänt med rätt till skriftlig komplettering

F: underkänt utan rätt till komplettering

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

1. I \mathbf{R}^2 med basvektorer $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ väljer man en ny bas $\mathbf{f} = \{7\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2, 6\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2\}$.
 - a. Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den vektor som i det gamla systemet har koordinaterna (59,68)?
 - b. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den vektor som i det nya systemet har koordinaterna (13,-14)?
 - c. Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $5x - 4y = 1$?

2. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan

$$f(x,y,z) = \ln(3x + yz - 20) - \frac{4x - 2z}{x + y - 6}$$

i punkten (5,2,3).

3. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2.$$

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{2x}{1+y} dx dy$$

över det ändliga området som begränsas av linjerna $y = x$, $y = 0$ och $x = 1$.

5. Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\Gamma} \frac{xy^2}{3+xy} dx + \frac{2x^2y + 3x}{3+xy} dy$$

i positiv led runt triangeln med hörnen i punkterna (0,0), (2,0) och (0,2).

6. Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x,y) = 2x + y$$

i det område som ges av $y \leq 4$ och $y \geq x^2$.

(4p)

7. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (3x, 3y, 2z) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

då \mathbf{S} är den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy -planet. Enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ har positiv z -komponent.

(4p)

8. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{F} = (3x^2 + y, 3y^2 + x).$$

- Visa att \mathbf{F} är konservativt i xy -planet.
- Bestäm en potential (dvs bestäm en potentialfunktion) till \mathbf{F} .
- Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\Gamma} (3x^2 + y) \, dx + (3y^2 + x) \, dy$$

då Γ går från $(0,0)$ till $(1,2)$ längs kurvan $2x^2 - xy + 2x - y = 0$.

(4p)

9. Visa att om två kvadratiska matriser \mathbf{A} och \mathbf{B} uppfyller $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$, för någon inverterbar matris \mathbf{C} , så har de samma karakteristiska polynom.

Ovanstående skall visas för allmänna $n \times n$ -matriser.

Ledning: använd att $\mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}$.

(4p)

10. Låt P och Q vara två godtyckliga punkter på kurvan $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$. Kan avståndet mellan P och Q vara lika med 3?

(4p)

1. Låt $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$. Man får $C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$. Om en punkt har koordinaterna (x,y) i det gamla

e -systemet och (u,v) i det nya f -systemet så har vi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

c. Vi har

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ dvs } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7u + 6v \\ 8u + 7v \end{pmatrix}$$

vilket insatt i ekvationen $5x - 4y = 1$ ger $3u + 2v = 1$.

Svar allmänt: a. (5,4)
b. (7,6)
c. $3u + 2v = 1$

2. Vi har

$$f'_x = \frac{3}{3x + yz - 20} - \frac{4(x + y - 6) - (4x - 2z)}{(x + y - 6)^2}$$

$$f'_y = \frac{z}{3x + yz - 20} + \frac{4x - 2z}{(x + y - 6)^2}$$

$$f'_z = \frac{y}{3x + yz - 20} - \frac{-2(x + y - 6)}{(x + y - 6)^2}$$

och i punkten $(5,2,3)$ fås $\text{grad } f = (13,17,4)$. Tangentplanet ges av ekvationen

$$(\text{grad } f) \cdot (x - 5, y - 2, z - 3) = 0$$

dvs

$$(13,17,4) \cdot (x - 5, y - 2, z - 3) = 0$$

alltså

Svar: $13x + 17y + 4z = 111$.

3. Funktionen

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2$$

är definierad i hela xy -planet \Rightarrow definitionsmängden innehåller inga randpunkter. De partiella derivatorna till f är definierade i varje punkt i xy -planet \Rightarrow det finns inga singularära punkter till f . Kritiska punkter fås ur

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 6x - 6y = 0 \\ f'_y = 2y - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0) \text{ eller } (4,12).$$

Vi har $A = f''_{xx} = 6x + 6$, $B = f''_{xy} = -6$, $C = f''_{yy} = 2$.

I punkten $(4,12)$ fås $AC - B^2 = 24 > 0 \Rightarrow$ extrempunkt, $A = 30 > 0 \Rightarrow$ minimipunkt.

I punkten $(0,0)$ fås $AC - B^2 = -24 < 0 \Rightarrow$ sadelpunkt.

Svar: lokal minimum i $(4,12)$.

$$4. \iint_D \frac{2x}{1+y} dx dy = \int_0^1 \frac{1}{1+y} dy \int_y^1 2x dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y} [x^2]_y^1 dy = \int_0^1 \frac{1-y^2}{1+y} dy = \int_0^1 (1-y) dy$$

5. Låt

$$P = \frac{xy^2}{3+xy} \quad \text{och} \quad Q = \frac{2x^2y + 3x}{3+xy}.$$

Vi har

$$P'_y = \frac{x^2y^2 + 6xy}{(3+xy)^2} \quad \text{och} \quad Q'_x = \frac{2x^2y^2 + 12xy + 9}{(3+xy)^2}.$$

Låt \mathbf{D} beteckna triangeln $0 \leq x$, $0 \leq y \leq 2 - x$. Enligt Greens formel får man

$$\int_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy = \iint_{\mathbf{D}} (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy = \iint_{\mathbf{D}} dx \, dy = \text{arean av } \mathbf{D} = 2.$$

Svar: 2.

6. Det tillåtna området är kompakt och funktionen är kontinuerlig \Rightarrow det finns ett största och ett minsta värde till funktionen. Extrempunkter finns bland kritiska punkter enligt följande:

Områdets inre ($y > x^2$, $y < 4$): Kritiska punkter måste uppfylla villkoret $f'_x = f'_y = 0$. Här är $f'_x = 2 \neq 0 \Rightarrow$ inga kritiska punkter i områdets inre.

På linjen $y = 4$: $f(x, y) = 2x + y = 2x + 4$ är strängt växande \Rightarrow inga kritiska punkter.

På parabeln $y = x^2$: $f(x, y) = 2x + y = 2x + x^2 = g(x)$. Kritiska punkter måste uppfylla villkoret $g'(x) = 0$, alltså $2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$, $y = 1$.

Skärningspunkterna mellan parabeln och linjen: $(\pm 2, 4)$.

Sammanfattningsvis får man alltså tre kritiska punkter $(-1, 1)$ och $(\pm 2, 4)$. I dessa punkter fås $f(-1, 1) = -1$, $f(-2, 4) = 0$ och $f(2, 4) = 8$ alltså

Svar: största värdet 8, minsta -1.

7. Ytans normalvektorn $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 2y, 1)$ har samma riktning som $\hat{\mathbf{N}}$. Om \mathbf{D} betecknar ytans projektion på xy -planet, dvs cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, så har vi

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{S}} (3x, 3y, 2z) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS &= \iint_{\mathbf{D}} (3x, 3y, 2 - 2x^2 - 2y^2) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx \, dy = \\ &= \iint_{\mathbf{D}} (2 + 4x^2 + 4y^2) \, dx \, dy = \{ \text{polära koordinater} \} = \\ &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (2 + 4r^2)r \, dr = [v]_0^{2\pi} [r^2 + r^4]_0^1 = 4\pi. \end{aligned}$$

Svar: 4π .

8a. Vi har

$$P(x, y) = 3x^2 + y,$$

$$Q(x, y) = 3y^2 + x,$$

$$P'_y = 1 = Q'_x$$

och inga singulära punkter \Rightarrow vektorfältet är konservativt i xy -planet.

8b. Vi söker en funktion $U(x, y)$ sådan att $\text{grad} U = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$ dvs

$$\begin{cases} U'_x = 3x^2 + y \\ U'_y = 3y^2 + x \end{cases}$$

Ekvationen $U'_x = 3x^2 + y$ medför att $U = x^3 + xy + f(y)$. Derivering ger $U'_y = x + f'_y$ samtidigt som $U'_y = 3y^2 + x$. Jämförelse av de båda uttrycken ger $f'_y = 3y^2$ dvs $f(y) = y^3 + C$ och $U = x^3 + xy + y^3 + C$.

8c. Enligt 8ab kan Γ ersättas med en godtycklig annan väg från $(0,0)$ till $(1,2)$ och linjeintegralens värde är $U(1,2) - U(0,0) = 11$.

Svar: $U = x^3 + xy + y^3 + C$. Integralen = 11.

9. Vi har

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= \det(\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{C} - \lambda \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1} (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \det(\mathbf{C}) = \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{C})} \cdot \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}). \end{aligned}$$

10. Ekvationen $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$ kan skrivas på formen $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 1$, där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. Den

karaktäristiska ekvationen $\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4 = 0$ ger två positiva egenvärden

$\lambda_1 = 6$ och $\lambda_2 = 1$ vilket medför att ekvationen beskriver en ellips. Genom en vridning (ändrar inte avståndet mellan punkterna) kan ellipsen överföras på en ellips med ekvationen $6x^2 + y^2 = 1$ vars halvaxellängder är $1/\sqrt{6}$ och 1. Det maximala avståndet mellan två punkter på denna ellips är 2.

Svar: Nej.
