KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2007–08–28, kl. 14.00–19.00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra II, för BD, M, P, T.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Preliminära betygsgränser:

A och 5:	godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B och 4:	godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C och 4:	godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D och 3:	godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E och 3:	godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
F och U:	underkänt.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

1. För den linjära avbildningen T gäller att $(1,0)$ och $(1,1)$ är egenvektorer svarande mot egenvärdena 2 respektive 17. Bestäm standardmatrisen för T.

2. Visa att funktionen $u(x,y) = g(xy^{-2})$ uppfyller den partiella differentialekvationen
$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
i området $y \neq 0$. Funktionen g antas vara deriverbar.

3. Bestäm största och minsta värdet av funktionen
$$f(x,y) = 2x^3 - xy^2$$
i området $x^2 + y^2 \leq 9$.

4. Beräkna volymen av det ändliga område som begränsas av paraboloiderna $z = x^2 + y^2$ och $z = 8 - x^2 - y^2$.

5. Beräkna linjeintegralen
$$\int_\Gamma xy^2\,dx + 2x^2y\,dy$$
då Γ är den kurva som är sammansatt av den räta linjen från origo till punkten $(2,2)$ och parabeln $y = x^2 - 2$ från punkten $(2,2)$ till punkten $(-2,2)$.

V.g.vänd

6. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{x^2}{\sqrt{1+3xy}}\,dx\,dy$$

där $\mathbf{D}$ är triangeln med hörn i punkterna (0,0), (1,0) och (1,1). (4p)

7. Hur snabbt (dvs med hur mycket per längdenhet) ökar funktionen

$$f(x,y,z) = \frac{4z}{x+y} + \ln(x+2y+3z-5)$$

i punkten (1,1,1) i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (1,2,2)$. (4p)

8. För vilka värden på konstanten a har funktionen

$$f(x,y) = (x^3 + 2axy + 2y^2)(x+a)$$

ett lokalt extremvärde i punkten (1,1)? Ange också extrempunktens karaktär. (4p)

9. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = (x^2y,\ y+z,\ x^2 - yz)$$

upp genom den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$ för vilken $z \geq 0$. (4p)

10. Visa att om två kvadratiska matriser $\boldsymbol{S}$ och $\boldsymbol{T}$ uppfyller sambandet $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}$, för någon inverterbar matris $\boldsymbol{P}$, så har de samma egenvärden. (4p)

Lycka till!

Lösningsförslag kommer att finnas på adressen
http://www.math.kth.se/~bronek/0607/amelia2/repetition/tentamen20070828.pdf

Resultatlista och informationen om kompletteringen kommer att finnas på adressen
http://www.math.kth.se/~bronek/0607/amelia2/resultat.html

1. Låt $\boldsymbol{A}$ vara T:s standardmatris. Dess kolumner är $T(1,0)$ och $T(0,1)$. Vi har

$$T(1,0) = 2(1,0) = (2,0)$$

$$T(0,1) = T(1,1) - T(1,0) = 17(1,1) - (2,0) = (15,17)$$

Det ger

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$.

---

2. Vi har

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g' \cdot \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g' \cdot \frac{-2x}{y^3},$$

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = g' \cdot \frac{2x}{y^2} + g' \cdot \frac{-2x}{y^2} = 0$$

för alla x och för $y \neq 0$.

---

3. Eftersom funktionen är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt i det inre av området eller i en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Kritiska punkter fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - y^2 = 0 \\ f'_y = -2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ (0,0)$$

Enda intressanta punkten i det inre är alltså origo.

Randen: $y^2 = 9 - x^2$, $-3 \leq x \leq 3$. Man får $f(x,y) = 3x^3 - 9x = h(x)$. Kritiska punkter för h fås ur $h'(x) = 9x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Detta svarar mot punkterna $(1, \pm\sqrt{8})$, $(-1, \pm\sqrt{8})$. Intressanta är också ändpunkterna i definitionsområdet till h. Funktionsvärdena i ovan nämnda punkter är 0, –6, 6, –54, 54. Det största värdet är alltså 54 och det minsta –54.

Svar: 54 resp –54.

---

4. Skärningskurvans projektion på xy–planet ges av

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Områdets projektion på xy–planet, **D**, är då cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$. Volymen ges av

$$\iint_{\mathbf{D}} (8 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \{\text{ polära koordinater }\} =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_0^2 (4 - r^2)r\,\mathrm{d}r = 16\pi.$$

Svar: 16π.

---

5. Kurvan Γ består av två delar som kan parametriseras enligt:

Linjen: $x = t$, $y = t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}t$, t går från 0 till 2.

Parabeln: $x = t$, $y = t^2 - 2$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t$, t går från 2 till –2.

Detta ger

$$\int_\Gamma xy^2\,dx + 2x^2y\,dy = \int_0^2 (t^3 + 2t^3)\,dt + \int_2^{-2} \big(t(t^2-2)^2 + 4t^3(t^2-2)\big)\,dt = 12.$$

Svar: 12.

6. Man får

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{x^2}{\sqrt{1+3xy}}\,dxdy = \int_0^1 x^2\,dx \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+3xy}}\,dy = \int_0^1 x^2 \Big[\frac{2}{3x}\sqrt{1+3xy}\Big]_0^x\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (x\sqrt{1+3x^2} - x)\,dx = \Big[\frac{2}{27}(1+3x^2)^{3/2} - \frac{x^2}{3}\Big]_0^1 = \frac{5}{27}.$$

Svar: $\frac{5}{27}$.

7. Den sökta ökningstakten ges av riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(1,1,1)$ är en enhetsvektor som pekar i den aktuella riktningen. Vi har

$$f'_x = -\frac{4z}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+2y+3z-5}$$

$$f'_y = -\frac{4z}{(x+y)^2} + \frac{2}{x+2y+3z-5}$$

$$f'_z = \frac{4}{x+y} + \frac{3}{x+2y+3z-5}$$

I punkten $(1,1,1)$ fås $f'_x = 0$, $f'_y = 1$, $f'_z = 5$ och $\operatorname{grad} f = (0,1,5)$. Eftersom f är en differentierbar funktion så är

$$f'_{\boldsymbol{v}}(1,1,1) = \frac{\boldsymbol{v}\cdot \operatorname{grad} f}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{(1,2,2)\cdot(0,1,5)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 4.$$

Svar: Funktionen ökar med 4 enheter per l.e.

8. Vi får att

$$\begin{cases} f'_x(1,1) = 2a^2 + 7a + 6 = 0 \\ f'_y(1,1) = 2a^2 + 7a + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2$$

vilket betyder att $(1,1)$ är en kritisk punkt om och endast om $a = -2$. För $a = -2$ får vi att $A = f''_{xx}(1,1) = -8$, $B = f''_{xy}(0,0) = -4$, $C = f''_{yy}(0,0) = 4$ och $AC - B^2 = 16$ vilket innebär att $(1,1)$ är en lokalt maximipunkt.

Svar: $a = -2$, lokalt max.

9. Vi sluter den givna yta $\mathbf{A}$: $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0$ genom att lägga till den plana cirkelskivan $\mathbf{B}$: $x^2 + y^2 \le 1$ i xy–planet. Låt $\mathbf{K}$ betyda det av $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ inneslutna kroppen (halvklot). Enligt divergenssatsen har vi

$$\iint_{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iiint_{\mathbf{K}} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz = \iiint_{\mathbf{K}} (2xy - y + 1)\,dxdydy =$$

$$= \{\text{ pga symmetri }\} = \iiint_{\mathbf{K}} dxdydz = \text{volymen av havklotet } \mathbf{K} = \frac{2\pi}{3}.$$

Från detta måste vi nu dra bort flödet ner genom cirkelskivan $\mathbf{B}$:

$$\iint_{\mathbf{B}} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iint_{\mathbf{B}} (x^2y,\, y+z,\, x^2 - yz)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \{ z = 0 \} =$$

$$= \iint_{\mathbf{B}} (x^2y,\, y,\, x^2)\cdot(0,0,-1)\,dS = \iint_{\mathbf{B}} (-x^2)\,dS = -\int_0^{2\pi} \cos^2 v\,dv \int_0^1 r^3\,dr =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2v}{2}\,\mathrm{d}v = -\frac{\pi}{4}.$$

Det sökta flödet är alltså $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{-\pi}{4} = \dfrac{11\pi}{12}$.

Svar: $11\pi/12$.

---

10. Påståendet följer av att matriserna $\boldsymbol{S}$ och $\boldsymbol{T}$ har samma karakteristiska polynom:
(Låt $\boldsymbol{E}$ nedan vara enhetsmatrisen med samma dimension som $\boldsymbol{S}$ och $\boldsymbol{T}$)

$$\boldsymbol{S}\text{:s karakteristiska polynom} = \det(\boldsymbol{S} - t\mathbf{E}) = \det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{TP} - t\mathbf{E}) =$$

$$= \det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{TP} - t\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{P}^{-1})\cdot\det(\boldsymbol{T} - t\mathbf{E})\cdot\det(\boldsymbol{P}) =$$

$$= \frac{1}{\det(\boldsymbol{P}^{-1})}\cdot\det(\boldsymbol{T} - t\mathbf{E})\cdot\det(\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{T} - t\mathbf{E}) = \boldsymbol{T}\text{:s karakteristiska polynom.}$$

.