KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2007–05–22, kl. 8.00–13.00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P, T.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Preliminära betygsgränser:

A och 5:	godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B och 4:	godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C och 4:	godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D och 3:	godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E och 3:	godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
F och U:	underkänt.

Tentamensbetyget gäller som betyg på hela kursen under förutsättning att man är godkänd på Inlämningsuppgifter v.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. I $\mathbf{R}^2$ med basvektorer $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ väljs vektorerna med koordinaterna $(1,2)$ respektive $(3,4)$ som nya basvektorer. Ange en ekvation i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $2x - y = 2$.

2. Beräkna riktningsderivatan av funktionen
$$f(x,y,z) = \frac{4xz}{y + z^2} + 4x\sqrt{x + 2y + z}$$
i punkten $(1,1,1)$ i riktning av vektorn $(2,-2,1)$.

3. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen
$$f(x,y) = x^3 - y^2 - 7x^2 + 2xy + 9x$$
samt ange deras karaktär.

4. Beräkna arean av den del av ytan $z = x^2 + y$ för vilken $0 \le y \le \sqrt{2 + 4x^2}$, $0 \le x \le 1$.

5. Beräkna linjeintegralen
$$\int_\Gamma xy^2\,\mathrm{d}x + 5x^2y\,\mathrm{d}y$$
då Γ är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$. Triangeln genomlöps i positiv led.

V.g.vänd

6. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} (y + 1)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

där $\mathbf{D}$ är det ändliga område som begränsas av linjerna $y = x$, $y = -1$, $y = 2$ och $x = 0$. (4p)

7. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (4y, -3x, z + x^2) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$$

där $\mathbf{S}$ är den del av ytan $z = 3x^2 + 4y^2$ där $x^2 + y^2 \leq 1$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent. (4p)

8. Visa att funktionen

$$f(x,y) = y + 2\sqrt{y - x^2} - 2\sqrt{1 - y}$$

antar ett största och ett minsta värdet och bestäm dessa værden. (4p)

9. Betrakta funktionen (4p)

$$f(x,y) = (2x - 3y)\mathrm{e}^{x-y}.$$

a. Bestäm Taylorpolynomet av första graden till f kring punkten $(3,2)$.

b. Beräkna derivatan $\dfrac{\partial^{48} f(0,0)}{\partial x^{25} \partial y^{23}}$.

10. En matris $\boldsymbol{A}$ uppfyller vilkoret $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. Bevisa att endast 0 och 1 kan vara egenvärden till $\boldsymbol{A}$. (4p)

Lycka till!

Lösningsförslag kommer att finnas på
http://www.math.kth.se/~bronek/amelia2/repetition/tentamen20070522.pdf
http://www.math.kth.se/~tranberg/5B1133.Extentor.html

Informationen om kompletteringsskrivningen kommer att finnas på
http://www.math.kth.se/~bronek/0607/amelia2/resultat.html

Lösningsförslag till tentamen i 5B1133, för BD, M, P, T. 2007–05–22.

1. Om en punkt har koordinaterna (x,y) i det gamla systemet och (u,v) i det nya systemet så har vi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} x = u + 3v \\ y = 2u + 4v \end{cases}$$

vilket insatt i linjens ekvation ger $2(u + 3v) - (2u + 4v) = 2 \Leftrightarrow v = 1$.

Svar: $v = 1$.

2. Vi har

$$f'_x = \frac{4z}{y + z^2} + 4\sqrt{x + 2y + z} + \frac{2x}{\sqrt{x + 2y + z}}$$

$$f'_y = \frac{-4xz}{(y + z^2)^2} + \frac{4x}{\sqrt{x + 2y + z}}$$

$$f'_z = \frac{4xy - 4xz^2}{(y + z^2)^2} + \frac{2x}{\sqrt{x + 2y + z}}$$

I punkten $(1,1,1)$ fås $f'_x = 11$, $f'_y = 1$, $f'_z = 1$ alltså $\operatorname{grad} f = (11,1,1)$.

Vi har $\boldsymbol{v} = (2,-2,1)$ och $|\boldsymbol{v}| = 3$ och $f'_{\boldsymbol{v}} = \dfrac{(11,1,1)\cdot(2,-2,1)}{3} = 7$.

Svar allmänt: 7.

3. Funktionen $f(x,y) = x^3 - y^2 - 7x^2 + 2xy + 9x$ är definierad i hela xy–planet $\Rightarrow$ definitionsmängden innehåller inga randpunkter.

De partiella derivatorna till f är definierade i varje punkt i xy–planet $\Rightarrow$ det finns inga singulära punkter till f.

Kritiska punkter fås ur

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 14x + 2y + 9 = 0 & \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 3 \\ f'_y = -2y + 2x = 0 \Rightarrow y = x \end{cases}$$

alltså punkterna $(1,1)$ och $(3,3)$.

Vi har $A = f''_{xx} = 6x - 14$, $B = f''_{xy} = 2$, $C = f''_{yy} = -2$ och $AC - B^2 = 24 - 12x$. Man får:

I $(1,1)$ är $AC - B^2 = 12 > 0$ och $A = -8 < 0 \Rightarrow$ en lokal maximipunkt.

I $(3,3)$ är $AC - B^2 = -12 < 0 \Rightarrow$ en sadelpunkt.

Svar: Lokal maximum i $(1,1)$.

4. Vi har $z'_x = 2x$, $z'_y = 1$. Låt $\mathbf{D}$ vara det givna området i xy–planet:

$$0 \le y \le \sqrt{2 + 4x^2},\quad 0 \le x \le 1.$$

Då gäller att arean ges av

$$\iint_{\mathbf{D}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \iint_{\mathbf{D}} \sqrt{2 + 4x^2}\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2+4x^2}} \sqrt{2 + 4x^2}\, dy =$$

$$= \int_0^1 (2 + 4x^2)\, dy = \left[2x + \frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{10}{3}.$$

Svar: $\dfrac{10}{3}$.

5. Låt $P = xy^2$ och $Q = 5x^2y$. Vi har $P'_y = 2xy$ och $Q'_x = 10xy$. Låt $\mathbf{D}$ beteckna triangelplattan $0 \le y \le x,\ x \le 1$. Enligt Greens formel får man

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathbf{D}} (Q'_x - P'_y)\,dxdy = \iint_{\mathbf{D}} 8xy\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x 8xy\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[4xy^2\right]_0^x dx = \int_0^1 4x^3\,dx = 1.$$

Svar allmänt: 1.

---

6. $\mathbf{D}$ delas in i två delar, $\mathbf{D}_1$: $0 \le x \le y,\ y \le 2$ och $\mathbf{D}_2$: $y \le x \le 0,\ -1 \le y$. Vi får

$$\iint_{\mathbf{D}_1} (y+1)\,dxdy = \int_0^2 (y+1)\,dy \int_0^y dx = \int_0^2 (y+1)\left[x\right]_0^y dy =$$

$$= \int_0^1 (y^2+y)\,dy = \left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = \frac{14}{3}$$

och

$$\iint_{\mathbf{D}_2} (y+1)\,dxdy = \int_{-1}^0 (y+1)\,dy \int_y^0 dx = \int_{-1}^0 (y+1)\left[x\right]_y^0 dy =$$

$$= -\int_{-1}^0 (y^2+y)\,dy = -\left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right]_{-1}^0 = \frac{1}{6}$$

alltså

$$\iint_{\mathbf{D}} (y+1)\,dxdy = \frac{29}{6}.$$

Svar: $\frac{29}{6}$.

---

7. Låt $\mathbf{D}$ beteckna cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 1$. Vi har

$$\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \pm(-z'_x,\ -z'_y,\ 1)\,dxdy = \{\ \hat{\boldsymbol{n}}\ \text{har positiv}\ z\text{–komponent}\ \} = (-6x, -8y, 1)\,dxdy$$

och

$$\iint_{\mathbf{S}} (4y, -3x, z + x^2)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (4y, -3x, z+x^2)\cdot(-6x, -8y, 1)\,dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (z + x^2)\,dxdy = \iint_{\mathbf{D}} (4x^2 + 4y^2)\,dxdy =$$

$$= \{\ x = r\cos v,\ y = r\sin v,\ \mathbf{D}\ \text{övergår på}\ \mathbf{G}\text{:}\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi\ \} =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} 4r^3\,drdv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 4r^3\,dr = 2\pi.$$

Svar: 2π.

---

8. Funktionen $f(x,y) = y + 2\sqrt{y - x^2} - 2\sqrt{1-y}$ är definierad och kontinuerlig på den kompakta mängden $x^2 \le y \le 1$. Följaktligen antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen eller i en singulär punkt.

Inre punkter $x^2 < y < 1$: Kritiska punkter fås ur ekvationesystemet $f'_x = 0,\ f'_y = 0$. Här är

$$f'_y = 1 + \frac{1}{\sqrt{y - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - y}} \neq 0$$

alltså det finns inga inre kritiska punkter.

På randen $y = 1$, $-1 \le x \le 1$ har vi $f(x,y) = 1 + 2\sqrt{1 - x^2}$ och största värdet här är 3, då $x = 0$. Minsta värdet 1 fås då $x = \pm 1$.

Kritiska punkter på randen $y = x^2$, $-1 < x < 1$: Nu blir $f(x,y) = x^2 - 2\sqrt{1 - x^2} = g(x)$. Kritiska punkter fås ur ekvationen $g'(x) = 2x + \dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$. Man får $x = 0$ och $g(0) = -2$.

Skärningspunterna mellan randkurvorna, $(-1,1)$ och $(1,1)$, är redan undersökta i den första randundersökningen.

Singulära punkter är identiska med randpunkterna, alltså de är redan undersökta. Största respektive minsta värdet finns bland de erhållna värdena 3, 1 och -2, vilket innebär att största värdet är 3 och minsta värdet är -2.

Svar: Största värdet = 3, minsta värdet = -2.

9a. Taylorpolynomet, p, ges av

$$p(x,y) = f(3,2) + f'_x(3,2)(x - 3) + f'_y(3,2)(y - 2).$$

Vi får

$$f(3,2) = 0,$$

$$f'_x = 2e^{x-y} + (2x - 3y)e^{x-y} = \{\text{ i } (3,2)\} = 2e$$

$$f'_y = -3e^{x-y} - (2x - 3y)e^{x-y} = \{\text{ i } (2,3)\} = -3e$$

alltså

$$p(x,y) = 2e(x - 3) - 3e(x - 2),$$

förenklat

$$p(x,y) = 2ex - 3ey.$$

Svar: $2ex - 3ey$.

9b. MacLaurinpolynomet av 48:e graden till f ges av

$$p(x,y) = (2x - 3y)\sum_{n=0}^{46} \frac{1}{n!}(x - y)^n + \frac{1}{47!}(2x - 3y)(x - y)^{47}$$

Utveckling av $\frac{1}{47!}(2x - 3y)(x - y)^{47}$ ger termen $x^{25}y^{23}$ som är en summa av

$$\frac{1}{47!} \cdot 2x \cdot \binom{47}{24} \cdot x^{24} \cdot (-y)^{23}$$

och

$$\frac{1}{47!} \cdot (-3y) \cdot \binom{47}{25} \cdot x^{25} \cdot (-y)^{22}$$

vilket innebär att koefficienten vid $x^{25}y^{23}$ är

$$\frac{1}{47!} \cdot 2.(-1) \cdot \binom{47}{24} + \frac{1}{47!} \cdot (-3) \cdot \binom{47}{25} = -\frac{119}{25!.23!}$$

Enligt entydighetssatsen för Taylorutvecklingar är denna koefficient

$$\frac{1}{48!}\binom{48}{25}\frac{\partial^{48} f(0,0)}{\partial x^{25}\partial y^{23}}.$$

Identifiering ger

$$-\frac{119}{25!.23!} = \frac{1}{48!}\binom{48}{25}\frac{\partial^{48} f(0,0)}{\partial x^{25}\partial y^{23}}$$

alltså $\dfrac{\partial^{48} f(0,0)}{\partial x^{25}\partial y^{23}} = -119.$

Svar: -119.

---

10. Låt λ våra ett egenvärde till $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{v}$ motsvarande egenvektor. Då gäller att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Eftersom $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, så får vi att

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

och

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v}$$

vilket innebär att $\lambda\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v}$. Eftersom $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ så är $\lambda^2 = \lambda$, alltså $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.