KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2006–08–21, kl. 8.00–13.00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P, T.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:

A och 5:	godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B och 4:	godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C och 4:	godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D och 3:	godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E och 3:	godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
F och U:	underkänt.

Tentamensbetyget gäller som betyg på hela kursen under förutsättning att man är godkänd på Inlämningsuppgifter v.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. För en linjär avbildning $A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att

$$A(1,1) = (3,1) \text{ och } A(6,7) = (2,1).$$

Avgör om A är inverterbar.

2. Beräkna riktningsderivatan till funktionen

$$f(x,y,z) = \frac{3x+y}{2x+y-z}$$

i punkten $(1,2,3)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (-1,2,2)$.

3. Visa att ekvationen

$$z^3 + xz - 2y = 0$$

definierar i en omgivning av punkten $(3,2,1)$ precis en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(3,2) = 1$. Bestäm derivatan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ i punkten $(3,2)$.

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{\cos(x+y)}{\sin x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

då $\mathbf{D}$ ges av $x + y \geq 0$, $y \leq 0$, $1 \leq x \leq 2$.

5. Beräkna ytintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (1 + x + y)z\,\mathrm{d}S$$

då $\mathbf{S}$ är halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

V.g.vänd

6. Låt (4p)

$$f(x,y) = a^3 e^{x-y} - a(x-y) + xy.$$

För vilka värden på konstanten a har f ett lokalt minimivärde i punkten $(0,0)$?

7. Bestäm, för de värden på konstanterna a och b för vilka fältet (4p)

$$\boldsymbol{F} = (y^{a+4} + (b+5)x^{b+4}y + (a+3)y^2 + 1,\ (a+4)xy^{a+3} + x^{b+5} + (b+4)x^2 + 2)$$

är konservativt, dess potentialfunktion.

8. Undersök om hela ytan (4p)

$$z = y - 2x + \sqrt{20 - 3x^2 - y^2}$$

ligger på samma sidan av planet $z = x + 2y - 13$.

9. Visa att skärningskurvan mellan ytan $x^3 + y^3 + z^3 + y = 0$ och planet $2x - y + z = 1$ kan lokalt parametriseras medelst en parameterframställning $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x), z(x))$. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan i punkten $(1,0,-1)$. (4p)

10. $\boldsymbol{A}$ är en symmetrisk 3×3–matris. Ett av $\boldsymbol{A}$:s egenvärden är lika med 2. För alla vektorer $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sådana att $x - 2y + z = 0$ gäller att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. Bestäm $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. (4p)

Lycka till!

Lösningsförslag kommer att finnas på
http://www.math.kth.se/~bronek/amelia2/repetition/tentamen20060821.pdf
http://www.math.kth.se/math/GRU/Extentor/5B1133.html

Information om vilka som får skriva kompletteringsskrivningen kommer att finnas på
http://www.math.kth.se/~bronek/0506/amelia2/resultat.html

Lösningsförslag till tentamen i 5B1133, för BD, M, P, T. 2006–08–21.

1. En linjär avbildning från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ är inverterbar om och endast om dess värdemängd är hela $\mathbf{R}^2$. Eftersom determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

utgör vektorerna (3,1), (2,1) en bas för $\mathbf{R}^2$. A:s värdemängd är alltså hela $\mathbf{R}^2$ och A är inverterbar.

Svar: A är inverterbar.

---

2. Vi har

$$f'_x = \frac{3(2x+y-z) - 2(3x+y)}{(2x+y-z)^2}$$

$$f'_y = \frac{2x+y-z-(3x+y)}{(2x+y-z)^2}$$

$$f'_z = \frac{3x+y}{(2x+y-z)^2}$$

I punkten (1,2,3) fås $f'_x = -7$, $f'_y = -4$, $f'_z = 5$ och $\operatorname{grad} f = (1,-2,1)$. Eftersom f är en differentierbar funktion så är

$$f'_{\boldsymbol{v}}(1,2,3) = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{(-1,2,2,) \cdot (-7,-4,5)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = 3.$$

Svar: 3.

---

3. Låt $f(x,y,z) = z^3 + xz - 2y$. Vi har $f'_z = 3z^2 + x$ och i punkten (3,2,1) får man $f(3,2,1) = 0$ och $f'_z(3,2,1) \neq 0$ vilket bevisar existensen av funktionen z.
Implicit derivering med avseende på x av

$$z^3 + xz - 2y = 0 \qquad (*)$$

ger

$$3z^2 z'_x + z + xz'_x = 0 \qquad (**)$$

och för $x = 3, y = 2, z = 1$ får man $z'_x(3,2) = -\frac{1}{6}$.

Implicit derivering med avseende på x av (**) ger

$$6z(z'_x)^2 + 3z^2 z''_{xx} + z'_x + z'_x + xz''_{xx} = 0$$

och för $x = 3, y = 2, z = 1, z'_x = -\frac{1}{6}$ får man $z''_{xx}(3,2) = \frac{1}{36}$.

Svar: $z''_{xx}(3,2) = \frac{1}{36}$.

---

4. $$\iint_{\mathbf{D}} \frac{\cos(x+y)}{\sin x}\, dxdy = \int_1^2 dx \int_{-x}^0 \frac{\cos(x+y)}{\sin x}\, dy = \int_1^2 \left[\frac{\sin(x+y)}{\sin x}\right]_{-x}^0 dx = \int_1^2 dx = 1.$$

Svar: 1.

---

5. $\mathbf{S}$ ges av $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ där $x^2+y^2 \leq 1$ ($\mathbf{D}$). Vi har

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\iint_{\mathbf{S}} (1 + x + y)z \, dS = \iint_{\mathbf{D}} (1 + x + y)\sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \, dx \, dy =$$

$$\iint_{\mathbf{D}} (1 + x + y) \, dx \, dy = \iint_{\mathbf{D}} dx \, dy + \iint_{\mathbf{D}} (x + y) \, dx \, dy =$$

$= \{$ symmetri m. a. p. $x + y = 0$ $\}$ = arean av $\mathbf{D} + 0 = \pi$.

Svar: π.

---

6. f är deriverbar, varför dess lokala extrempunkter fås ur ekvationssytemet

$$\begin{cases} f_x' = 0 \\ f_y' = 0 \end{cases}.$$

I punkten $(0,0)$ fås

$$\begin{cases} f_x' = a^3 e^{x - y} - a + y = a^3 - a = 0 \\ f_y' = -a^3 e^{x - y} + a + x = -a^3 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1, 0, 1,$$

alltså $(0,0)$ kan vara en lokal minimipunkt endast för dessa a–värden. Vi undersöker punktens karaktär:

$$A = f_{xx}'' = a^3 e^{x - y} = a^3,$$

$$B = f_{xy}'' = -a^3 e^{x - y} + 1 = 1 - a^3,$$

$$C = f_{yy}'' = a^3 e^{x - y} = a^3$$

och

$$AC - B^2 = a^6 - (1 - a^3)^2 = \begin{cases} < 0 \text{ om } a = -1 \Rightarrow \text{sadel} \\ < 0 \text{ om } a = 0 \Rightarrow \text{sadel} \\ > 0 \text{ och } A > 0 \text{ om } a = 1 \Rightarrow \text{lokal minimum} \end{cases}$$

Svar: $a = 1$.

---

7. Beteckna

$$P = y^{a + 4} + (b + 5)x^{b + 4}y + (a + 3)y^2 + 1,$$

$$Q = (a + 4)xy^{a + 3} + x^{b + 5} + (b + 4)x^2 + 2.$$

Ett nödvändig villkor för att vektorfältet (P,Q) skall vara konservativt är att $P_y' - Q_x' = 0$. Vi får

$$P_y' - Q_x' = (a + 4)y^{a + 3} + (b + 5)x^{b + 4} + 2y(a + 3) - (a + 4)y^{a + 3} - (b + 5)x^{b + 4} - 2(b + 4)x =$$

$$= 2y(a + 3) - 2(b + 4)x$$

vilket innebär att fältet kan vara konservativt endast då $a = -3$ och $b = -4$. Vi får då

$$\boldsymbol{F} = (2y + 1, 2x + 2)$$

och vi undersöker $\boldsymbol{F}$ är konservativt. Vi söker en funktion U (potentialfunktion) sådan att $\operatorname{grad} U = \boldsymbol{F}$, dvs $(U_x', U_y') = (2y + 1, 2x + 2)$.
Ur $U_x' = 2y + 1$ får man att $U = 2xy + x + f(y)$. Vi får då att $U_y' = 2x + f_y'$ och samtidigt vet vi att $U_y' = 2x + 2$. Jämförelse av dessa uttryck ger att $f_y' = 2$ alltså $f(y) = 2y$ + konstant och vi får $U = 2xy + x + 2y + C$.

Svar: $2xy + x + 2y + C$.

---

8. Ytan $z = y - 2x + \sqrt{20 - 3x^2 - y^2}$ ligger på ena sidan av planet $z = x + 2y - 13$ om och endast om funktionen $f(x,y) = (x + 2y - 13) - (y - 2x + \sqrt{20 - 3x^2 - y^2})$ har konstant

tecken. Vi söker det största och det minsta värdet av den kontinuerliga funktionen f på den kompakta mängden $3x^2 + y^2 \le 20$.

Områdets inre punkter $(20 - 3x^2 - y^2 > 0)$:

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 3 + \dfrac{3x}{\sqrt{20 - 3x^2 - y^2}} \\ 0 = f'_y = 1 + \dfrac{y}{\sqrt{20 - 3x^2 - y^2}} \end{cases}$$

$f'_x - 3f'_y = 0 \Rightarrow y = x \Rightarrow f'_x = 0$ ger $(x,y) = (-2,-2)$ och $f(-2,-2) < 0$.

Områdets rand $(3x^2 + y^2 - 20 = 0)$: Parametrisering $x = \sqrt{\frac{20}{3}} \cos t,\ y = \sqrt{20} \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$,

ger $f(x,y) = \sqrt{60} \cos t + \sqrt{20} \sin t - 13 < \sqrt{60} + \sqrt{20} - 13 < 0$.

Sammanfattning: Det största värdet antas antingen i punkten $(-2,-2)$ (där f är < 0) eller på randen (där f är < 0) alltså $f(x,y) < 0$ för alla (x,y).

Svar: Ja.

---

9. Låt $f(x.y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ och $g(x,y,z) = x + y + z - 1$. Vi har

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3y^2 & 3z^2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och determinanten

$$\det \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = 1 + 3y^2 + 3z^2 \neq 0.$$

Detta medför att y och z kan lokalt lösas ur ekvationssystemet $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$ som kontinuerligt deriverbara funktioner $y = y(x)$, $z = z(x)$. Kurvan kan parametriseras medelst $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x), z(x))$. Vi har $f(1,0,-1) = g(1,0.-1) = 0$, dvs punkten ligger på kurvan. Kurvans tangentvektor har riktning $(\text{grad } f)\times(\text{grad } g)$. I punkten $(1,0,-1)$ får man

$$\text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (3x^2, 3y^2 + 1, 3z^2) = (3,1,3)$$

$$\text{grad } g = (g'_x, g'_y, g'_z) = (2,-1,1)$$

$$(\text{grad } f)\times(\text{grad } g) = (3,1,3)\times 1,-1,1) = (4,3,-5).$$

Tangentlinjen ges av $p(t) = (1 + 4t, 3t, -1 - 5t)$.

Svar: Tangentlinjen ges av $p(t) = (1 + 4t, 3t, -1 - 5t)$.

---

10. Vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektorer hörande till egenvärdet 1. Då $\boldsymbol{A}$ är symmetrisk med egenvärdet 2 får vi att planets normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor hörande till egenvärdet 2.

Talen a, b och c bestäms nu så att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man finner att $a = 1$, $b = -1$ och $c = 1$. Vi får nu

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
