KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2006–05–30, kl. 14.00–19.00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P, T.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:

A och 5: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
F och U: underkänt.

Tentamensbetyget gäller som betyg på hela kursen under förutsättning att man är godkänd på Inlämningsuppgifter v.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. För en inverterbar linjär avbildning $A: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att

$$A(-1,1) = (3,1) \text{ och } A^{-1}(6,7) = (2,1).$$

Bestäm $A(4,5)$.

2. Vi förutsätter att funktionen $f(u,v)$ har kontinuerliga partiella derivator. Sätt $z = f(u,v)$ där $u = \dfrac{x}{y}$, $v = xy$. Bestäm $xz'_x + yz'_y$. Svaret får innehålla f, u och v men inte x och y.

3. Visa att ekvationen

$$2xz + 5xy - z^3 = 35$$

definierar i en omgivning av punkten $(3,2,1)$ precis en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(3,2) = 1$. Bestäm en ekvation för tangetplanet till ytan $z = z(x,y)$ i punkten $(3,2,1)$.

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

då $\mathbf{D}$ är den fyrhörning som begränsas av linjerna $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 3$.

5. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma 4xy\,\mathrm{d}x + (3x + 2y)\,\mathrm{d}y$$

då Γ är den kurva som sammansätts av parabelbågen $y = x^2$ från $(0,0)$ till $(1,1)$ och därifrån sträckan längs linjen $y = 1$ från $(1,1)$ till $(-2,1)$.

V.g.vänd

6. Beräkna flödesintegralen (4p)

$$\iint_{\mathbf{S}} (x,\ 2y,\ 9z) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$$

där $\mathbf{S}$ är den del av ytan $z = xy$ som projiceras på den triangel som begränsas av linjerna $x + y = 2$, $y = x$, $y = 0$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent (dvs $\hat{\boldsymbol{n}}$ pekar uppåt).

7. Betrakta funktionen $f(x,y) = xy$. (4p)

a. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till f.

b. Kan f anta värdet 33 om (x,y) tillhör ellipsskivan $x^2 + 4y^2 \leq 128$?

8. Osquar har lämnat in nedanstående felfria men ofullbordade lösningen på ett tentamens-problem. Formulera problemet. Lös problemet.

$f'_x = \sqrt{8}$, $f'_y = y$. Enligt formeln för (*en kaffefläck och oläsbar text*)

$$\iint_{\mathbf{D}} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{2x}^4 \sqrt{9 + y^2}\, \mathrm{d}y = \,?$$

Jag tror att jag kastar om integrationsordning.

Sedan får jag kanske substituera $\sqrt{9 + y^2} = t$.

Usch! Hur gör man?

Tidsbrist!!! (4p)

9. Visa att vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende om och endast om vektorerna

$$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\ \ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3,\ \ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4$$

är linjärt oberoende. (4p)

10. Den maximala arean för en triangel vars hörn ligger på en cirkel antas för en liksidig triangel. Vilken är den maximala arean av en triangel vars hörn ligger på ellipsen $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$? (4p)

Lycka till!

Lösningsförslag till tentamen i 5B1133, för BD, M, P, T. 2006–05–30.

1. Eftersom A är inverterbar så är $A(2,1) = (6,7)$. Vi söker konstanter a och b så att

$$(4,5) = a(-1,1) + b(2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 4 \\ a + \ \ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2,\ b = 3.$$

dvs. $(4,5) = 2(-1,1) + 3(2,1)$. Lineariteten av A medför att

$$A(4,5) = 2A(-1,1) + 3A(2,1) = 2(3,1) + 3(6,7) = (24,23)$$

Svar: (24,23).

---

2. Vi har

$$z'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = \frac{1}{y} f'_u + y f'_v$$

$$z'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = -\frac{x}{y^2} f'_u + x f'_v$$

och

$$x z'_x + y z'_y = 2xy f'_v = 2v f'_v$$

Svar: $2v f'_v$.

---

3. Låt $f(x,y,z) = 2xz + 5xy - z^3 - 35$. Vi har $f'_z = 2x - 3z^2$ och i punkten $(3,2,1)$ får man $f(3,2,1) = 0$ och $f'_z(3,2,1) \neq 0$ vilket bevisar existensen av funktionen z.

Vi har

$$\text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (2z + 5y,\ 5x,\ 2x - 3z^2)$$

och grad $f(3,2,1) = (12,15,3)$.

Tangentplanet ges av

$$(12,15,3) \cdot (x - 3,\ y - 2,\ z - 1) = 0$$

och efter förenkling får vi $4x + 5y + z = 23$.

Metod 2.

Implicit derivering med avseende på x av

$$2xz + 5xy - z^3 - 35 = 0 \qquad (*)$$

ger

$$2z + 2xz'_x + 5y - 3z^2 z'_x = 0$$

och för $x = 3, y = 2, z = 1$ får man $z'_x(3,2) = -4$.

Implicit derivering med avseende på y av (*) ger

$$2xz'_x + 5x - 3z^2 z'_y = 0$$

och för $x = 3, y = 2, z = 1$ får man $z'_y(3,2) = -5$.

Tangentplanet ges av

$$z'_y(3,2)(x - 3) + z'_y(3,2)(y - 2) - (z - 1) = 0$$

alltså

$$-4(x - 3) - 5(y - 2) - (z - 1) = 0$$

och efter förenkling får vi

Svar: $4x + 5y + z = 23$.

---

4. Vi har

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{x}{y^2}\,dxdy = \int_1^3 dx \int_x^{2x} \frac{x}{y^2}\,dy = \int_1^3 \left[\frac{-x}{y}\right]_x^{2x} dx = \int_1^3 \frac{1}{2}\,dx = 1.$$

Svar: 1.

---

5. Låt Γ_1 beteckna parabelbågen $y = x^2$ från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,1)$ och låt Γ_2 beteckna linjen $y = 1$ från punkten $(1,1)$ till punkten $(-2,1)$. Vi har

$$\int_{\Gamma_1} 4xy\,dx + (3x + 2y)\,dy = \{\, y = x^2,\ dy = 2x\,dx,\ x \text{ från } 0 \text{ till } 1 \,\} = \int_0^1 (8x^3 + 6x^2)\,dx = \left[2x^4 + 2x^3\right]_{ö}^{1} = 4$$

$$\int_{\Gamma_2} 4xy\,dx + (3x + 2y)\,dy = \{\, y = 1,\ dy = 0,\ x \text{ från } 1 \text{ till } -2 \,\} = \int_1^{-2} 4x\,dx = \left[2x^2\right]_1^{-2} = 6$$

$$\int_{\Gamma} 4xy\,dx + (3x + 2y)\,dy = \int_{\Gamma_1} 4xy\,dx + (3x + 2y)\,dy + \int_{\Gamma_2} 4xy\,dx + (3x + 2y)\,dy = 10.$$

Svar: 10.

---

6. Låt $\mathbf{D}$ beteckna triangeln $x + y \le 2,\ y \le x,\ y \ge 0$. Vi har

$$\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)\,dxdy = \{\text{ positiv } z\text{–komponent }\} = (-y, -x, 1)\,dxdy$$

och

$$\iint_{\mathbf{S}} (x, 2y, 9z) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (x, 2y, 9z) \cdot (-y, -x, 1)\,dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (-xy - 2xy + 9z)\,dxdy = \iint_{\mathbf{D}} (-3xy + 9xy)\,dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} 6xy\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} 6xy\,dx = \int_0^1 \left[3x^2y\right]_y^{2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 (12y - 12y^2)\,dy = \left[6y^2 - 4y^3\right]_0^1 = 2.$$

Svar: 2.

7a. Eventuella lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y) = xy$ fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_x = y = 0 \\ f'_y = x = 0 \end{cases}$$

Man får punkten $(0,0)$. I denna punkt får vi
$A = f''_{xx} = 0,\ B = f''_{xy} = 1,\ C = f''_{yy} = 0$ och $AC - B^2 = -1 < 0$ vilket innebär att $(0,0)$ är en sadelpunkt.

Svar: Funktionen har inga lokala extrempunkter.

7b. Eftersom funktionen $f(x,y) = xy$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $x^2 + 4y^2 \le 128$ är sluten och begränsad så antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre lokalextrempunkt eller i en singulär punkt eller i en kritisk punkt på randen. Enligt 7a finns det inga inre lokalextrempunkter. Det finns inte heller några singulära punkter (varken för f eller på ellipsen).

Kritiska punkter på randen $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 128 = 0$ kan fås med hjälp av Lagranges metod dvs genom att lösa ekvationssystemet $\text{grad}\, f = t\ \text{grad}\, g$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$:

$$\begin{cases} f'_x = t\, g'_x \\ f'_y = t\, g'_y \\ g = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} y = 2tx \\ x = 8ty \\ x^2 + 4y^2 = 128 \end{cases}$$

Observera att varken x eller y kan vara lika med 0. Den första ekvationen divideras ledvis med den andra. Man får $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2tx}{8ty}$ och efter förenkling $x = \pm 2y$ vilket, insatt i den tredje ekvationen, ger $y = \pm 4$, dvs man får fyra kritiska punkter $(8,4)$, $(8,-4)$, $(-8,4)$ och $(-8,-4)$. I dessa punkter antar f största värdet 32 (och minsta värdet -32). Följaktligen finns det inte någon punkt (x,y) på ellipsskivan sådan att $f(x,y) = 33$.

Svar: Nej, det kan den inte.

---

8. Ur integralsambandet fås att $\mathbf{D}$ är ett område i xy–planet som ges av $0 \le x \le y/2$, $0 \le y \le 4$.

Integranden tyder på att uppgiften handlar om beräkning av arean av ytan $z = f(x,y)$ över $\mathbf{D}$. Ur $f'_x = \sqrt{8}$, $f'_y = y$ fås $f(x,y) = 2\sqrt{2}x + \dfrac{y^2}{2}$ + någon konstant. Vi har

$$\iint_{\mathbf{D}} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy = \int_0^2 dx \int_{2x}^4 \sqrt{9 + y^2}\, dy = \int_0^4 dy \int_0^{y/2} \sqrt{9 + y^2}\, dx =$$

$$= \int_0^4 \sqrt{9 + y^2}\, \Big[x\Big]_0^{y/2} dy = \int_0^4 \frac{1}{2} y\sqrt{9 + y^2}\, dy =$$

$$= \{ \sqrt{9 + y^2} = t,\ 9 + y^2 = t^2,\ ydy = tdt \} = \frac{1}{2} \int_3^5 t^2\, dt = \frac{49}{3}.$$

Svar: Beräkna arean av ytan $z = 2\sqrt{2}x + \dfrac{y^2}{2}$, $0 \le x \le 2$, $2x \le y \le 4$. Arean $= \dfrac{49}{3}$.

---

9. Antag att

$$a\boldsymbol{v}_1 + b(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + c(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3) + d(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4) = \mathbf{0}.$$

Då gäller efter omskrivning att

$$(a + b + c + d)\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 + d\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Om $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende så måste det gälla att

$$a + b + c + d = b = c = d = 0$$

dvs $a = b = c = d = 0$. Detta innebär att vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende.

Antag att

$$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 + d\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Då gäller efter omskrivning att

$$(a - b - c - d)\boldsymbol{v}_1 + b(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + c(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3) + d(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4) = \mathbf{0}.$$

Om $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende så måste

$$a - b - c - d = b = c = d = 0$$

dvs $a = b = c = d = 0$. Detta innebär att vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende.

---

10. Låt T vara en sådan triangel. Vi byter koordinatssystem i xy–planet genom att sätta $u = ax$ och $v = by$. Funktionerna u och v är linjära varför triangeln T avbildas på en triangel, säg S. Ellipsen $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ deformeras till cirkeln $u^2 + v^2 = 1$. Vi har

$$\text{arean av } S = \iint_S \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_T \left|\det \frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_T ab\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab \cdot \text{arean av } T$$

dvs. maximala arean av T = (maximala arean av S)$/ab = \dfrac{3\sqrt{3}}{4ab}$.

$\boxed{\textbf{Svar: } \dfrac{3\sqrt{3}}{4ab}.}$