Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2006–01–17, kl. 14.00–19.00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P, T.

5B1141, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för IT.

För BD, M, P och T gäller följande:

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:
A och 5: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
F och U: underkänt.

För IT gäller följande:

Alla uppgifter kan räknas, oavsett resultat på lappskrivningar.
Uppgifterna 1–5 är 3–poängsuppgifter, medan 6–10 är 4–poängsuppgifter.
Poängen från lappskrivningarna (0–12 poäng) adderas till poängsumman på tentamen, och för totalsumman gäller betygsgränserna 15 (betyg 3), 22 (betyg 4), 30 (betyg 5).

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. För vilka värden på konstanten a bildar vektorerna
$$(1,2,1,0),\ (a,a,1,0),\ (2,1,2,1) \text{ och } (1,1,1,0)$$
en bas i $\mathbf{R}^4$?

2. Vi förutsätter att funktionen $f(u,v)$ har kontinuerliga partiella derivator. Sätt $z = f(u, v)$ där $u = 3x + 4y$, $v = xy$. Bestäm $xz'_x + yz'_y$. Svaret får innehålla f, u och v men inte x och y.

3. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_{\mathbf{D}} (x + y - 2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
då $\mathbf{D}$ är det ändliga område som begränsas av linjerna $y = x, y = 3x$ och $x + y = 4$.

4. Beräkna linjeintegralen
$$\int_{\Gamma} xy^2 \mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$$
längs kvartscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,1)$.

5. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_{\mathbf{S}} (4x,\ 6y,\ z) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$$
där $\mathbf{S}$ är ytan $z = xy^2$, $0 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent.

V.g.vänd

6. Visa att ekvationen

$$z^3 - 4xz + y + 2 = 0$$

definierar i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ precis en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(1,1) = 1$. Bestäm Taylorpolynomet av första graden till z kring punkten $(1,1)$. (4p)

7. En partikel färdas i planet så att dess acceleration vid tiden t är $\boldsymbol{a}(t) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Partikelns hastighet vid tiden $t = 1$ är $\boldsymbol{v}(1) = (0,2)$. Hur lång bana genomlöper partikeln under tidsintervallet $1 \le t \le 3$? (4p)

8. Man vet att kurvan $4x^4 + 4x^3y + y^4 = 1$ är sluten. Bestäm dess projektion på x–axeln. (4p)

9. Planet $x + y + z = 1$ delar enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ i två delar. Beräkna volymen av den mindre delen. (4p)

10. En symmetrisk matris $\boldsymbol{A}$ har alla egenvärden lika med ett. Visa att $\boldsymbol{A}$ är enhetsmatrisen $\mathbf{E}$. (4p)

Lösningsförslag kommer att finnas på
http://www.math.kth.se/~bronek/amelia2/repetition/tentamen20050603.pdf

1. Vi har

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ a & a & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ a & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = -(1-a) = a-1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = 1$$

vilket innebär att vektorerna bildar en bas om och endast om $a \neq 1$.

$\boxed{\textbf{Svar: } a \neq 1.}$

2. Vi har

$$z'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = 3f'_u + yf'_v$$

$$z'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = 4f'_u + xf'_v$$

och

$$xz'_x + yz'_y = (3x+4y)f'_u + 2xyf'_v = uf'_u + 2vf'_v$$

$\boxed{\textbf{Svar: } uf'_u + 2vf'_v.}$

3. Vi har

$$\iint\limits_{\mathbf{D}} (x+y-2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathbf{D}_1} (x+y-2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\mathbf{D}_2} (x+y-2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

där området $\mathbf{D}_1$ begränsas av linjerna $y = x, y = 3x$ och $x = 1$ och $\mathbf{D}_2$ begränsas av linjerna $x = 1, y = x$ och $x + y = 4$.

$$\iint\limits_{\mathbf{D}_1} (x+y-2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{3x} (x+y-2)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} - 2y\right]_{y=x}^{y=3x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (6x^2-4x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\iint\limits_{\mathbf{D}_2} (x+y-2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^{4-x} (x+y-2)\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} - 2y\right]_{y=x}^{y=4-x} \mathrm{d}x = \int_1^2 (4x-2x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

$\boxed{\textbf{Svar: } \frac{4}{3}.}$

4. Vi har $y = \sqrt{1-x^2}$, $\mathrm{d}y = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ där x går från 1 till 0. Man får

$$xy^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = x(1-x^2)\mathrm{d}x + \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -x^3\mathrm{d}x$$

och

$$\int\limits_{\Gamma} xy^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = -\int_1^0 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

$\boxed{\textbf{Svar: } \frac{1}{4}.}$

5. Låt $\mathbf{D}$ vara triangeln $0 \le y \le x, 0 \le x \le 1$. Vi har $z = xy^2$, $z'_x = y^2$, $z'_y = 2xy$ och

$$\hat{\boldsymbol{n}} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-y^2, -2xy, 1).$$

Man får

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} (4x, 6y, z)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\mathbf{D}} (4x, 6y, xy^2)\cdot(-y^2, -2xy, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D -15xy^2\,dxdy = -\int_0^1 dx \int_0^x 15xy^2 dy = -\int_0^1 \left[5xy^3\right]_{y=0}^{y=x} dx = -\int_0^1 5x^4\,dx = -1.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } -1.}$

---

6. Låt $f(x,y,z) = z^3 - 4xz + y + 2$. Vi har $f'_z = 3z^2 - 4x$ och i punkten $(1,1,1)$ får man $f(1,1,1) = 0$ och $f'_z(1,1,1) \neq 0$ vilket bevisar existensen av funktionen z. Implicit derivering med avseende på x av

$$z^3 - 4xz + y + 2 \qquad (*)$$

ger

$$3z^2 z'_x - 4z - 4xz'_x = 0$$

och för $x = 1, y = 1, z = 1$ får man $z'_x(1,1) = -4$.

Implicit derivering med avseende på y av $(*)$ ger

$$3z^2 z'_y - 4xz'_y + 1$$

och för $x = 1, y = 1, z = 1$ får man $z'_y(1,1) = 1$. Det sökta polynomet ges av

$$z(1,1) + z'_x(1,1)(x-1) + z'_y(1,1)(y-1)$$

alltså

$\boxed{\textbf{Svar: } 1 - 4(x-1) + (y-1).}$

---

7. Partikelns hastighet vid tiden t ges av $\boldsymbol{v}(t) = (t + a,\ 2\sqrt{t} + b)$ för några konstanter a, b. Eftersom $\boldsymbol{v}(1) = (0,2)$ är $\boldsymbol{v}(t) = (t - 1,\ 2\sqrt{t})$. Den aktuella kurvans längd ges av

$$\int_1^3 |\boldsymbol{v}|\,dt = \int_1^3 \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{2})^2}\,dt = \int_1^3 (t+1)\,dt = 6.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 6.}$

---

8. Vi söker största och minsta värden av funktionen $f(x,y) = x$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$ där $g(x,y) = 4x^4 + 4x^3y + y^4 - 1$. Enligt Lagranges metod måste vi undersöka var funktionernas gradienter har samma riktning. Nu är $\text{grad}\, f = (1,0)$ medan $\text{grad}\, g = (16x^3 + 12x^2y,\ 4x^3 + 4y^3)$, vilket leder till $x^3 + y^3 = 0$, dvs. $y = -x$. Insättning i bivillkorsekvationen ger $4x^4 + 4x^3(-x) + x^4 = 1$, varav $x = \pm 1$.

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{Intervallet } -1 \leq x \leq 1.}$

---

9. Avståndet mellan planet och origo är $1/\sqrt{3}$. Vrid till koordinater (u,v,w) som gör att planet blir parallellt med uv–planet. Detta påverkar inte volymen. Den kalott var volym vi skall bestämma beskrivs nu av $1/\sqrt{3} \leq w \leq 1,\ u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. Vi beräknar volymen som

$$V = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} A(w)\,dw,$$

där $A(w)$ är arean av den skiva som fås för konstant w, en cirkel med radie $\sqrt{1 - w^2}$, dva $A(w) = \pi(1 - w^2)$. Vi får

$$V = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \pi(1 - w^2)\,dw = \frac{18 - 8\sqrt{3}}{27}\,\pi.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } \frac{18 - 8\sqrt{3}}{27}\,\pi.}$

---

10. Då $\boldsymbol{A}$ är symmetrisk $n{\times}n$–matris så existerar ON–bas $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ i $\mathbf{R}^n$ av egenvektorer till $\boldsymbol{A}$. Då alla egenvärden är $= 1$ har vi att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i$ för varje i alltså $\boldsymbol{A}$ är en matris för identitets avbildningen, dvs $\boldsymbol{A} = \mathbf{E}$.