

Tentamensskrivning, 2005-08-27, kl. 14.00-19.00.

**5B1133 Analytiska metoder och linjär algebra 2,
för BD, M, P och T.**

**5B1141, Analytiska metoder och linjär algebra 2,
för IT.**

- För BD, M, P och T gäller följande:

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:

A och 5: godkänt på alla momenten 1-5 och 14-20 poäng på uppgifterna 6-10.

B och 4: godkänt på alla momenten 1-5 och 11-13 poäng på uppgifterna 6-10.

C och 4: godkänt på alla momenten 1-5 och 8-10 poäng på uppgifterna 6-10.

D och 3: godkänt på alla momenten 1-5 och 5-7 poäng på uppgifterna 6-10.

E och 3: godkänt på alla momenten 1-5 och 3-4 poäng på uppgifterna 6-10.

F och U: underkänt.

- För IT gäller följande:

Alla uppgifter kan räknas, oavsett resultat på lappskrivningar. Uppgifterna 1-5 är 3-poängsuppgifter, medan 6-10 är 4-poängsuppgifter. Poängen från lappskrivningarna (0-12 poäng) adderas till poängsumman på tentamen och för totalsumman gäller betygsgränserna 15 (betyg 3), 22 (betyg 4), 30 (betyg 5).

- Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget.

Lycka till!

Var god vänd!

Uppgift 1-5

1. Bestäm matrisen för den linjära avbildning $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som avbildar vektorn $(7, 2)$ på $(1, 0)$ och vektorn $(3, 1)$ på $(0, 1)$.
2. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan

$$2x^2 - y \cos z + 3x \sin z = 0$$

i punkten $(1, 2, 0)$.

3. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till funktionen

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - 3y}$$

i punkten $(x, y) = (2, 1)$. Ange resttermen på ordoform.

4. Integrationen

$$\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$$

kan uppfattas som beräkningen av en dubbelintegral över ett område D . Bestäm detta område, och beräkna sedan integralen genom att integrera först med avseende på x .

5. Undersök om vektorfältet

$$\mathbf{F} = (2xy, x^2 + \cos y, e^z)$$

är konservativt och bestäm i så fall en potential till det.

Uppgift 6-10

6. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma$$

då \mathbf{F} är vektorfältet

$$\mathbf{F} = (x^3 - z, y^3 - x, z^3 - y)$$

och ∂K betecknar den totala begränsningsytan till cylindern

$$K : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

Normalvektorn $\hat{\mathbf{n}}$ är riktad ut från K .

7. Bestäm ekvationen för den räta linje $y = ax + b$ som i minsta kvadratmening bäst anpassar till de fyra punkterna $(x, y) = (-1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2)$.
8. Kurvan

$$x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 = 4$$

kan genom ett ortogonalt koordinatbyte bringas på formen

$$a\xi^2 + b\eta^2 = 1,$$

där a och b är konstanter och ξ, η de nya koordinaterna. De senare är relaterade till de ursprungliga koordinaterna x, y genom

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

där C är en ON-matris.

Bestäm konstanterna a och b samt matrisen C . Ange även kurvans typ.

9. En yta definieras genom ekvationen

$$2xyz - z^3 = 16.$$

Undersök om ytan kan uppfattas som grafen till en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x, y)$ i en omgivning till någon av punkterna $(2, 3, 2)$ och $(5, 2, 4)$ (som ligger på ytan).

Bestäm, i förekommande fall, de partiell derivatorna $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ i punkten i fråga.

10. De hyperboliska trigonometriska funktionerna $\cosh t$ och $\sinh t$ definieras av

$$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Undersök om den obegränsade kropp K som definieras av

$$K : \quad \sinh(x^2 + y^2) \leq z \leq \cosh(x^2 + y^2)$$

har ändlig volym och bestäm i så fall volymen.

**Lösningförslag till tentamensskrivning, 2005-08-27, i
5B1133 och 5B1141, Amelia 2**

1. Den inversa matrisen är

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är den sökta matrisen själv

$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{7 \cdot 1 - 3 \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Låt $F(x, y, z) = 2x^2 - y \cos z + 3x \sin z$. Då är

$$\text{grad } F = (4x + 3 \sin z, -\cos z, y \sin z + 3x \cos z) = (\text{i punkten } (1, 2, 0)) = (4, -1, 3).$$

Det följer att tangentplanet i punkten $(1, 2, 0)$ är

$$4(x - 1) + (-1)(y - 2) + 3z = 0,$$

eller, förenklat,

$$4x - y + 3z = 2.$$

3. Med $(x, y) = (2 + h, 1 + k)$ och med användande av $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \dots$ ($|u| < 1$) fås

$$\begin{aligned} f(2 + h, 1 + k) &= \frac{1}{(2 + h)^2 - 3(1 + k)} = \frac{1}{1 + (4h - 3k + h^2)} \\ &= 1 - (4h - 3k + h^2) + (4h - 3k + h^2)^2 - \dots \\ &= 1 - 4h + 3k + 15h^2 - 24hk + 9k^2 + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2}). \end{aligned}$$

4. Området D är triangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. Omkastning av integrationsordning ger

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy &= \iint_D e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y e^{-y^2} dx \\ &= \int_0^1 ye^{-y^2} dy = \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

5. Fältet \mathbf{F} är definierat och kontinuerligt deriverbart i hela \mathbb{R}^3 , och

$$\text{rot } \mathbf{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + \cos y & e^z \end{pmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{2x} - \mathbf{2x}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}).$$

Alltså är \mathbf{F} konservativt och har en potential, U , i hela \mathbb{R}^3 .

Potentialen bestäms genom att integrera systemet

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \cos y \\ \frac{\partial U}{\partial z} = e^z. \end{cases}$$

Den första ekvationen ger

$$U = x^2y + f(y, z),$$

där f är en tills vidare okänd funktion av y och z . Vi får

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial f}{\partial y},$$

som jämfört med den mellersta ekvationen ovan ger att

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y, \quad \text{dvs} \quad f(x, y) = \sin y + g(z)$$

för någon funktion g . Därmed har vi

$$U = x^2y + \sin y + g(z), \quad \text{som ger} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = g'(z).$$

Jämförelse med den sista ekvationen ovan ger att $g(z) = e^z + C$. Detta ger till slut

$$U = x^2y + \sin y + e^z + C.$$

6. Man kan integrera direkt eller använda Gauss' sats. Vi väljer det senare och får (integration först med avseende på z och därefter polära koordinater i (x, y) -planet):

$$\begin{aligned} \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma &= \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = \iiint_K (3\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{y}^2 + 3\mathbf{z}^2) \, dx dy dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [3x^2z + 3y^2z + z^3]_0^2 \, dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (6x^2 + 6y^2 + 8) \, dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (6r^2 + 8) r \, dr = 2\pi \left[\frac{6r^4}{4} + \frac{8r^2}{2} \right]_0^1 = 11\pi. \end{aligned}$$

7. Det ekvationssystem som koefficienterna a och b behöver uppfylla för att den räta linjen $y = ax + b$ ska gå genom de angivna punkterna är

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Man kan inte förvänta sig att detta system ska ha någon lösning (fler ekvationer än obekanta), men det i minsta kvadratmening bästa valet av a , b fås genom att lösa "normalekvationen"

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ovanstående förenklas till

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

som har lösningen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/10 \end{pmatrix}.$$

Alltså är den sökta linjen

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{10}.$$

8. Vi skriver ekvationen på formen

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4,$$

där A är den symmetriska matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}.$$

Karakteristiska ekvationen för A är

$$\lambda^2 - 12\lambda - 64 = 0,$$

som har rötterna (= A :s egenvärden)

$$\lambda_1 = 16, \quad \lambda_2 = -4.$$

Den sökta matrisen C :s kolonner är egenvektorerna till λ_1 och λ_2 normerade till längd ett. En (onormerad) egenvektor \mathbf{v}_1 till λ_1 fås ur $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ (eller $(A - \lambda_1 E)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$), vilket ger, t.ex.,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3} \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Efter normering blir detta $\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Med motsvarande räkningar för λ_2 fås

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Kurvans ekvation blir $16\xi^2 - 4\eta^2 = 4$, eller

$$4\xi^2 - \eta^2 = 1.$$

9. Sätt

$$F(x, y, z) = 2xyz - z^3.$$

Vi har

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2xy - 3z^2 = \begin{cases} 0 & \text{i punkten } (2, 3, 2) \\ -28 & \text{i punkten } (5, 2, 4) \end{cases}$$

Alltså är, enligt implicita funktionssatsen, ytan garanterat en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x, y)$ i närheten av punkten $(5, 2, 4)$. Detta innebär att $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Derivering med avseende på x och y ger

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

så att, i punkten $(5, 2, 4)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2yz}{2xy - 3z^2} = -\frac{16}{-28} = \frac{4}{7},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xz}{2xy - 3z^2} = -\frac{40}{-28} = \frac{10}{7}.$$

I punkten $(2, 3, 2)$ hade vi $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ medan, till exempel,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2yz = 12 \neq 0.$$

Det följer att ytan inte kan skrivas på formen $z = z(x, y)$ (med z kontinuerligt deriverbar) i närheten av $(2, 3, 2)$, ty ovanstående implicitderivering med avseende på x skulle ge motsägelsen $12 + 0 = 0$.

10. Den del, K_R , av K som befinner sig inom avstånd R från z -axeln har volym

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K_R) &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (\cosh(x^2 + y^2) - \sinh(x^2 + y^2)) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= (\text{ polära koordinater }) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

Detta växer mot π då $R \rightarrow \infty$. Alltså följer att K har ändlig volym $= \pi$.