Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2005–06–03, kl. 8.00–13.00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P, T.

5B1141, Analytiska metoder och linjär algebra 2, för IT.

För BD, M, P och T gäller följande:

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:
A och 5: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C och 4: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E och 3: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
F och U: underkänt.

För IT gäller följande:

Alla uppgifter kan räknas, oavsett resultat på lappskrivningar.
Uppgifterna 1–5 är 3–poängsuppgifter, medan 6–10 är 4–poängsuppgifter.
Poängen från lappskrivningarna (0–12 poäng) adderas till poängsumman på tentamen, och för totalsumman gäller betygsgränserna 15 (betyg 3), 22 (betyg 4), 30 (betyg 5).

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en matris C och en diagonalmatris D sådana att $C^{-1}AC = D$.

2. Bestäm riktningsderivatan av funktionen

$$f(x,y,z) = \frac{4z}{x+y} + \ln(x + 2y + 3z - 5)$$

i punkten $(1,1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (1,2,2)$.

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} (2x + 3y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

då $\mathbf{D}$ är det ändliga området som begränsas av linjerna $x + y = 2$, $y = x$ och $y = 0$.

4. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma \frac{xy^2 + 2y}{1 + xy}\, \mathrm{d}x + \frac{2x^2y + 3x}{1 + xy}\, \mathrm{d}y$$

där Γ är randen av kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ genomlöpt i positiv led.

5. Låt $f(x,y,z) = x^2z + 2y$ och $\boldsymbol{F} = (3x + z^2, 2x + y, yz)$. Avgör vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem i förekommande fall:

a. div grad f
b. rot grad f
c. grad rot $\boldsymbol{F}$
d. div rot $\boldsymbol{F}$.

V.g.vänd

6. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = 6x + 2y$ på den slutna ellipsskivan $3x^2 + y^2 \leq 16$. (4p)

7. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (4y,\ -3x,\ z + x^2) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$

där $\mathbf{S}$ är den del av ytan $z = 3x^2 + 4y^2$ där $x^2 + y^2 \leq 1$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent. (4p)

8. Visa att funktionen $\boldsymbol{f}(x,y)$ given av

$$\boldsymbol{f} : \begin{cases} u = 2x + \sin y \\ v = \sin x + y + 1 \end{cases}$$

är lokalt inverterbar i varje punkt (x,y). Bestäm inversens Jacobimatris svarande mot punkten $(x,y,u,v) = (0,0,0,1)$. Ange de partiella derivatorna $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ och $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ i denna punkt. (4p)

9. Undersök om det finns något tal a sådant att

$$x^2 + 4xy + ay^2 + 2x - y = 0$$

är ekvationen för en parabel. (4p)

10. En tunn platta som ges av $z = 1 + xy$, $x^2 + y^2 \leq 1$ har masstätheten $\sqrt{1 + x^2 + y^2}$ per ytenhet i varje punkt (x,y,z) på plattan. Bestäm plattans totala massa. (4p)

Lösningsförslag kommer att finnas på
http://www.math.kth.se/~bronek/amelia2/repetition/tentamen20050603.pdf

Lösningsförslag till tentamen i 5B1133, för BD, M, P, T den 2005–06–03.

1. Då $\det(A - \lambda \mathrm{E}) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ blir A:s egenvärden 2 och 3. Egenvektorerna bestäms ur ekvationen $(A - \lambda \mathrm{E})\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Man får $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Således har vi $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Svar: Exempelvis $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Vi har

$$f'_x = -\frac{4z}{(x+y)^2} + \frac{1}{x + 2y + 3z - 5}$$

$$f'_y = -\frac{4z}{(x+y)^2} + \frac{2}{x + 2y + 3z - 5}$$

$$f'_z = \frac{4}{x+y} + \frac{3}{x + 2y + 3z - 5}$$

I punkten $(1,1,1)$ fås $f'_x = 0$, $f'_y = 1$, $f'_z = 5$ och $\operatorname{grad} f = (0,1,5)$. Eftersom f är en differentierbar funktion så är

$$f'_{\boldsymbol{v}}(1,1,1) = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{(1,2,2) \cdot (0,1,5)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 4.$$

Svar: 4.

3. $$\iint_{\mathbf{D}} (2x + 3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{2-y} (2x + 3y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[x^2 + xy\Big]_y^{2-y} \mathrm{d}y = \int_0^1 (4 + 2y - 6y^2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \Big[4y + y^2 - 2x^3\Big]_0^1 = 3.$$

Svar: 3.

4. Låt

$$P = \frac{xy^2 + 2y}{1 + xy} \quad \text{och} \quad Q = \frac{2x^2y + 3x}{1 + xy}.$$

Vi har

$$P'_y = \frac{x^2y^2 + 2xy + 2}{(1 + xy)^2} \quad \text{och} \quad Q'_x = \frac{2x^2y^2 + 4xy + 3}{(1+xy)^2}.$$

Låt $\mathbf{D}$ beteckna kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Enligt Greens formel får man

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbf{D}} (Q'_x - P'_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbf{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \text{ arean av } \mathbf{D} = 1.$$

Svar: 1.

5. a. $\operatorname{grad} f = \nabla f = (2xz, 2, x^2)$ och $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot \operatorname{grad} f = 2z$.

b. $\operatorname{grad} f = \nabla f = (2xz, 2, x^2)$

$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \nabla \times \operatorname{grad} f = (0,0,0)$ (vilket inträffar för alla f).

c. $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ är en vektor, grad är ej definierad för en vektor, alltså $\operatorname{grad} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ ej definierad.

d. $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = (z, 2z, 2)$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ (vilket inträffar för alla $\boldsymbol{F}$).

Svar: $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = 2z$, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = (0,0,0)$, $\operatorname{grad} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ ej definierad, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$.

6. Eftersom $f(x,y) = 6x + 2y$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $3x^2 + y^2 \le 16$ är sluten och begränsad så antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen eller i en singulär punkt.

   Inre kritiska punkter fås ur ekvationesystemet $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Här är $f'_x = 6 \ne 0$ alltså det finns inga inre kritiska punkter.

   Kritiska punkter på randen $g(x,y) = 3x^2 + y^2 - 16 = 0$ kan fås med hjälp av Lagranges metod dvs genom att lösa ekvationssystemet grad $f = t$ grad g under bivillkoret $g(x,y) = 0$:

$$\begin{cases} f'_x = t\,g'_x \\ f'_y = t\,g'_y \\ g = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} 6 = 6tx \\ 2 = 2ty \\ 3x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

   Ur den första och den andra ekvationen fås $x = y$ vilket, insatt i den tredje ekvationen, ger $x = \pm 2$, dvs man får punkterna $(2,2)$ och $(-2,-2)$. Några singulära punkter finns inte.

   Sammanfattningsvis får vi två kritiska punkter $(2,2)$ och $(-2,-2)$. I dessa punkter antar f värdena -16 och 16.

Svar: Största värdet = 16, minsta värdet = –16.

---

7. Låt $\mathbf{D}$ beteckna cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 1$. Vi har

$$\hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \pm(-z'_x,\ -z'_y,\ 1)\, dxdy = \{\ \hat{\boldsymbol{n}} \text{ har positiv } z\text{–komponent }\} = (-6x,\ -8y,\ 1)\, dxdy$$

   och

$$\iint_{\mathbf{S}} (4y,\ -3x,\ z + x^2) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_{\mathbf{D}} (4y,\ -3x,\ z + x^2) \cdot (-6x,\ -8y,\ 1)\, dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (z + x^2)\, dxdy = \iint_{\mathbf{D}} (4x^2 + 4y^2)\, dxdy =$$

$$= \{\text{ substitution: } x = r\cos v,\ y = r\sin v,\ \mathbf{D} \text{ övergår på } \mathbf{G}\text{: } 0 \le r \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi\ \} =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} 4r^3\, drdv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 4r^3\, dr = 2\pi.$$

Svar: 2π.

---

8. Vi har

$$J_{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \cos y \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}$$

   och $\det J_{\boldsymbol{f}} = 2 - \cos x \cos y \ne 0$ för alla (x,y) vilket medför att funktionen $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar i en godtycklig punkt (x,y). Jacobimatrisen för den inversa funktionen $\boldsymbol{f}^{-1}$ ges av

$$J_{\boldsymbol{f}^{-1}} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \cos y \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \{\text{ i punkten } (x,y,u,v) = (0,0,0,1)\ \} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   Speciellt ser vi att $x'_u(0,1) = 1$ och $y'_v(0,1) = 2$.

Svar: $x'_u(0,1) = 1$, $y'_v(0,1) = 2$, $J_{\boldsymbol{f}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

---

9. Den kvadratiska delen $x^2 + 4xy + ay^2$ beskrivs av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$. *Om* den givna ekvationen skall vara en ekvation för en parabel så måste ett av egenvärdena till matrisen A vara lika med noll. Egenvärdena fås ur ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(a-\lambda) - 4 = 0.$$

För $\lambda = 0$ får vi $a = 4$, vilket alltså är det enda *tänkbara* värdet för vilket den givna ekvationen beskriver en parabel. Den karakteristiska ekvationen är då $(1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$ och man får rötterna 0 och 5.

Egenvektorerna bestäms ur ekvationen $(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. För $\lambda = 5$ får vi

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2b - c = 0.$$

En motsvarande egenvektor är $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Egenvektorerna till det andra egenvärdet $\lambda = 0$ är vinkelräta mot $\boldsymbol{v}_1$ och en egenvektor är därför $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

De båda valda egenvektorerna har längden $\sqrt{5}$. Koordinatbytet med transformationen

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}u - \dfrac{2}{\sqrt{5}}v \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}u + \dfrac{1}{\sqrt{5}}v \end{cases}$$

ger ekvationen $5u^2 - \sqrt{5}v = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{5}u^2$, alltså en parabel.

Svar: Parabeln $\Leftrightarrow a = 4$.

---

10. Vi parametriserar ytan, **S**, genom $\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, z)$ där $z = 1 + xy$. Plattans totala massa är $\iint_{\mathbf{S}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, d\sigma$. Vi har

$$d\sigma = |\boldsymbol{r}_x' \times \boldsymbol{r}_y'| = \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}\, dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$

alltså massan är $\iint_{\mathbf{D}} (1 + x^2 + y^2)\, dxdy$ där **D** är cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 1$. Polär substitution ger $\int_0^{2\pi} dv \int_0^1 r(1 + r^2)\, dr = \dfrac{3\pi}{2}$.

Svar: $\dfrac{3\pi}{2}$.
