

Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 2
för M, BD, P och T (kurskod 5B1133) samt IT (kurskod 5B1141)

Den 15 januari 2005 kl 14.00-19.00

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter ska ni bara lösa dem som svarar mot moment ni inte blivit godkända på under kursens gång. Bedömningen här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser: För betyg 3 krävs godkänt på moment 1-5 plus 3 poäng totalt på uppgifterna 6-10. För betyg 4 krävs godkänt på moment 1-5 plus 7 poäng totalt på uppgifterna 6-10. För betyg 5 krävs godkänt på moment 1-5 plus 12 poäng totalt på uppgifterna 6-10. Utförliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

1. Finn en bas för \mathbf{R}^2 där samtliga basvektorer är egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ (standardkoordinater).
2. Låt $f(x, y) = y^4 e^{x^2-1} + 1$. Bestäm tangentplanet i punkten $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 2)$ till ytan $z = f(x, y)$.
3. Avgör om funktionen $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x^2} - x \cos y + xy \\ \ln(xy + 1) - \arctan y \end{pmatrix}$ är inverterbar i någon omgivning av origo.
4. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dx + (2xy + y^2) dy$, där γ är den del av parabelkurvan $y = 1 - x^2$ som ligger i första kvadranten, genomlöst en gång med start i $(1, 0)$ och slut i $(0, 1)$.
5. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y, 0)$ ut ur det område K som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$.

6. Bestäm en potentialfunktion till vektorfältet $\mathbf{F} = (ye^x + z, e^x + z, y + x)$ och använd denna för att beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ är skruvlinjen $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
7. Du har två vektorer i \mathbf{R}^3 givna i standardkoordinater som $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestäm matrisen (i standardkoordinater) för den linjära avbildning som består i ortogonal projektion på det plan genom origo som spänns upp av \mathbf{u} och \mathbf{v} .
8. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{y}{2x+y} dx dy$ där D är den parallelogram som begränsas av linjerna $2y - x = 0$, $2y - x = 2$, $2x + y = 1$, $2x + y = 2$.
9. Bestäm arean av den största likbenta triangel som kan skrivas in i enhetscirkeln.
10. Finn alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x, y) = e^{2x^2+y^4+4xy}$.

Lösningförslag publiceras första vardagen efter tentamensdagen på <http://www.math.kth.se/tranberg/5B1133.Extentor.html>

Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 2
för M, BD, P och T (kurskod 5B1133) samt IT (kurskod 5B1141)

Den 15 januari 2005 kl 14.00-19.00

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter ska ni bara lösa dem som svarar mot moment ni inte blivit godkända på under kursens gång. Bedömningen här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser: För betyg 3 krävs godkänt på moment 1-5 plus 3 poäng totalt på uppgifterna 6-10. För betyg 4 krävs godkänt på moment 1-5 plus 7 poäng totalt på uppgifterna 6-10. För betyg 5 krävs godkänt på moment 1-5 plus 12 poäng totalt på uppgifterna 6-10. Utförliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

1. Finn en bas för \mathbf{R}^2 där samtliga basvektorer är egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ (standardkoordinater).

Lösning: Kalla den givna matrisen för A . Den karakteristiska ekvationen för A är $(1-c)(9-c) - 9 = 0$ med lösningar $c = 0$ och $c = 10$, som alltså är egenvärdena till matrisen A . Egenvektorer som hör till egenvärdet 0 fås som lösningar \mathbf{v} till ekvationen $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dvs $\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Egenvektorer som hör till egenvärdet 10 fås som lösningar till $\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, dvs $\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vi ser att $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas för \mathbf{R}^2 som består av egenvektorer till A .

2. Låt $f(x, y) = y^4 e^{x^2-1} + 1$. Bestäm tangentplanet i punkten $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 2)$ till ytan $z = f(x, y)$.

Lösning: Vi deriverar och får $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 e^{x^2-1}$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 e^{x^2-1}$. I den aktuella punkten är alltså $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = -4$, varför tangentplanet ges av ekvationen $z = 2 + 2(x - 1) - 4(y + 1)$.

3. Avgör om funktionen $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x^2} - x \cos y + xy \\ \ln(xy + 1) - \arctan y \end{pmatrix}$ är inverterbar i någon omgivning av origo.

Lösning: Vi deriverar och får jacobimatrisen

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2} - \cos y + y & -x \sin y + x \\ \frac{y}{xy + 1} & \frac{x}{xy + 1} - \frac{1}{1 + y^2} \end{pmatrix}$$

Vi ser sedan att när vi sätter in $(x, y) = (0, 0)$ får vi

$$J_F(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vars determinant är $1 \neq 0$, varför inversa funktionssatsen garanterar existensen av en lokal invers.

4. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dx + (2xy + y^2) dy$, där γ är den del av parabelkurvan $y = 1 - x^2$ som ligger i första kvadranten, genomlöst en gång med start i $(1, 0)$ och slut i $(0, 1)$.

Lösning: Vi ser att $\frac{\partial(2xy + y^2)}{\partial x} = 2y = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y}$, för alla x, y , så differentialformen är exakt och kurvintegralen alltså oberoende av vägen. Vi kan då (till exempel) byta väg och integrera längs axlarna istället, dvs först från $(1, 0)$ till origo och sedan från origo till $(0, 1)$. Gör vi detta så får vi

$$\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dx + (2xy + y^2) dy = \int_1^0 x^2 dx + \int_0^1 y^2 dy = 0.$$

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y, 0)$ ut ur det område K som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$.

Lösning: Begränsningsytan till K består av två ytstycken. Det första, låt oss kalla det för Y_1 , ges av $z = 4$, $x^2 + y^2 \leq 4$. Det andra, låt oss kalla det för Y_2 , ges av $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

På Y_1 har vi den utåtriktade normalen $N = (0, 0, 1)$ så flödet genom Y_1 blir

$$\int_{Y_1} (x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) dS = \int_{Y_1} 0 dS = 0.$$

Ytstycket Y_2 parameteriseras av $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ där $x^2 + y^2 \leq 4$, den utåtriktade normalen ges av $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (2x, 2y, -1)$. Flödet genom Y_2 blir därför (om D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$):

$$\begin{aligned} \int_{Y_2} (x, y, 0) \cdot (2x, 2y, -1) dS &= \int_D (2x^2 + 2y^2) dx dy = \{\text{polära koordinater}\} \\ &= 2\pi \int_0^2 2r^3 dr \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Flödet är alltså 16π .

6. Bestäm en potentialfunktion till vektorfältet $\mathbf{F} = (ye^x + z, e^x + z, y + x)$ och använd denna för att beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ är skruvlinjen $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Lösning: Om $U(x, y, z)$ är en potentialfunktion till vektorfältet F , så måste för det första $\partial U / \partial x = ye^x + z$. Det betyder att $U(x, y, z) = ye^x + zx + g(y, z)$ för någon funktion g . Eftersom för det andra $\partial U / \partial y = e^x + z$ ser vi nu att $\partial g / \partial y = z$ vilket betyder att $g(y, z) = yz + h(z)$. Det tredje villkoret som U måste uppfylla är $\partial U / \partial z = y + x$ vilket ger att $h(z) = C$ för någon konstant C . Vi kan lika gärna välja $C = 0$. Vi har då att $U(x, y, z) = ye^x + (x + y)z$ är en potentialfunktion till det givna vektorfältet. Nu ges kurvintegralen som potentialfunktionens värde i slutpunkten på kurvan minus potentialfunktionens värde i startpunkten på kurvan, dvs

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(-1, 0, \pi) - U(1, 0, 0) = -\pi.$$

7. Du har två vektorer i \mathbf{R}^3 givna i standardkoordinater som $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestäm matrisen (i standardkoordinater) för den linjära avbildning som består i ortogonal projektion på det plan genom origo som spänns upp av \mathbf{u} och \mathbf{v} .

Lösning: En normal till planet ges av $u \times v = (-6, 6, 3)$, multipliceras denna med $1/3$ får vi $n = (-2, 2, 1)$ som förstås också är normal till planet. En godtycklig vektor v får en projektion v_P på planet som räknas ut enligt $v_P = v - v_n$, där v_n är v s

projektion på n . Matrisen för avbildningen har kolonnvektorer som är projektionerna av basvektorerna. I första kolonnen står därför

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 \\ 4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}.$$

Det som ska stå i matrisens andra kolonn fås med en liknande uträkning, där första basvektorn bytts ut mot andra, som $(0, 1, 0) - ((0, 1, 0) \cdot (-2, 2, 1)/9)(-2, 2, 1) = (4/9, 5/9, -2/9)$. I tredje kolonnen står $(0, 0, 1) - ((0, 0, 1) \cdot (-2, 2, 1)/9)(-2, 2, 1) = (2/9, -2/9, 8/9)$

Matrisen är alltså $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

8. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{y}{2x+y} dx dy$ där D är den parallelogram som begränsas av linjerna $2y - x = 0$, $2y - x = 2$, $2x + y = 1$, $2x + y = 2$.

Lösning: Vi gör koordinatbytet

$$\begin{cases} u = 2y - x \\ v = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}u + \frac{2}{5}v \\ y = \frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v \end{cases}$$

och vi ser att beloppet av jacobianen för koordinatbytet är $1/5$. Därför får vi nu:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{2x+y} dx dy &= \int_1^2 \left(\int_0^2 \frac{1}{25} \frac{2u+v}{v} du \right) dv \\ &= \frac{1}{25} \int_1^2 \left[\frac{u^2 + vu}{v} \right]_0^2 dv \\ &= \frac{1}{25} \int_1^2 \frac{4 + 2v}{v} dv \\ &= \frac{1}{25} [4 \ln v + 2v]_1^2 \\ &= \frac{4 \ln 2 + 2}{25}. \end{aligned}$$

9. Bestäm arean av den största likbenta triangel som kan skrivas in i enhetscirkeln.

Lösning: Vi kan anta att triangelns symmetriaxel är y -axeln, dess hörn ligger då i punkterna $(0, 1)$ och $(\pm x, y)$. Dess area är då $A(x, y) = x(1 - y)$, där $x \geq 0$, som ska maximeras under bivillkoret $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Eftersom målfunktionen A uppenbart är kontinuerlig och bivillkoret definierar en kompakt mängd så existerar ett största värde. Det antas då i en randpunkt eller i en punkt som uppfyller Lagranges multiplikatorvillkor. Randpunkterna i det här fallet är $(0, 1)$ och $(0, -1)$ som ger arean 0. Lagranges villkor säger att $\text{grad } f = \lambda \text{grad } g$ (om inte $\text{grad } g = 0$, vilket inte är fallet för oss), samtidigt som $g = 0$, dvs i vårt fall har vi följande system av villkor som ska vara uppfyllda:

$$\begin{cases} (1 - y) = \lambda 2x \\ -x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger $\lambda = (1 - y)/2x$ vilket insatt i den andra ger $x^2 = y^2 - y$ vilket insatt i den tredje ger $2y^2 - y - 1 = 0$ med lösning $y = -1/2$ och $y = 1$. Möjliga punkter för max är alltså (0 ± 1) och $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ och vi ser att den senare punkten ger maximal area, nämligen $3\sqrt{3}/4$.

10. Finn alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x, y) = e^{2x^2 + y^4 + 4xy}$.

Lösning: Eftersom exponentialfunktionen är strängt växande räcker det att söka extrempunkter till exponenten $g(x, y) = 2x^2 + y^4 + 4xy$, som är ett polynom och alltså deriverbar hur många gånger som helst i hela planet. Vi börjar med att derivera och bestämma de kritiska punkterna till g . Vi har att $\partial g / \partial x = 4x + 4y$ och $\partial g / \partial y = 4y^3 + 4x$. Kritiska punkter är de punkter där båda dessa är noll, vilket inträffar när $y = -x$ och $x = -y^3$ samtidigt. Detta ger de kritiska punkterna $(0, 0)$, $(1, -1)$ och $(-1, 1)$. För att avgöra om dessa är extrempunkter behöver vi andraderivatorna: $\partial^2 g / \partial x^2 = 4$ och $\partial^2 g / \partial y^2 = 12y^2$ och $\partial^2 g / \partial x \partial y = 4$. I origo är alltså $g(x, y) = \frac{1}{2}(4x^2 + 2 \cdot 4xy) +$ högre ordningens termer $= \frac{1}{2}((2x + 2y)^2 - 4y^2) +$ högre ordningens termer, så vi ser att origo är en sadelpunkt för g . I punkten $(1, -1)$ är $g(x, y) = \frac{1}{2}(4(x-1)^2 + 2 \cdot 4(x-1)(y+1) + 12(y+1)^2) +$ högre ordningens termer $= \frac{1}{2}((2(x-1) + 2(y+1))^2 + 8(y+1)^2) +$ högre ordningens termer, så vi ser att detta är en minpunkt. Av symmetriskäl gäller detsamma punkten $(-1, 1)$. Den givna funktionen har alltså två extrempunkter, som båda är min-punkter, nämligen $(1, -1)$ och $(-1, 1)$.