

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:
För betyg 3 krävs godkänt på moment 1-5 plus 3 poäng totalt på uppgifterna 6-10.
För betyg 4 krävs godkänt på moment 1-5 plus 7 poäng totalt på uppgifterna 6-10.
För betyg 5 krävs godkänt på moment 1-5 plus 12 poäng totalt på uppgifterna 6-10.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget.

1. Det är känt att L är en linjär avbildning samt att $L\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $L\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestäm $L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Bestäm tangentplanets ekvation till grafytan $z = \frac{y^2 - xy}{x^3 - y^2}$ i punkten $(x_0, y_0) = (2, 3)$
3. Bestäm alla lokala maximipunkter till $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{-y}$
4. Beräkna volymen av den ändliga kroppen som begränsas av koordinatplanen samt planet $y = 12$ och ytan $x + 2z - z^2 = 1$
5. Beräkna flödesintegralen $\oiint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n} d\sigma$ då där S är ytan till det axelparallella rätblocket med två av hörnen i punkterna $(0, 0, 0)$ och $(3, 2, 1)$, $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, z^2)$, \hat{n} är utåtriktad enhetsnormal.
6. Bestäm Taylorpolynomet av tredje ordning till funktionen $f(x, y) = \cos(x + y - 3) + (y - 2)e^{1-x}$ kring punkten $(1, 2)$.
7. Undersök om vektorfältet $\vec{F} = \left(\frac{2xy}{x^2 + 1} + \frac{y}{x^2 y^2 + 1}, \ln(x^2 + 1) + \frac{x}{x^2 y^2 + 1} + 3 \right)$ är konservativt. Om så är fallet bestäm en potential till \vec{F} .
8. Bestäm arean av den delen av konen $x^2 + y^2 = z^2$ som tillhör området $0 \leq yx^2 \leq 1, x \geq 3, z \geq 0$
9. Beräkna linjentalen $\int_L (4x + 2y) dx + z dy$ där L är skärningskurvan mellan ytorna $z = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$ och $2x - 4y + z = 6$. Skärningskurvan genomlöps på så sätt att kurvans projektion på xy -planet genomlöps motsols.
10. Det är känt att på ytan $xy + yz + xz = 12$ finns en punkt som ligger närmast till planet $x + y + z = 1$. Bestäm punkten och avståndet.

Lycka till!

Lösningsförslag och svar

1. Det är känt att L är en linjär avbildning samt att $L\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $L\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestäm $L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösning. Eftersom en linjär avbildning bibehåller linjära kombinationer, räcker det att hitta två tal x och y sådana att $x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Likheten är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ som har en enda lösning } x = 2, y = 1. \text{ Således}$$

$$L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = L\left(2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 2L\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Svar. $L\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. Bestäm tangentplanets ekvation till grafytan $z = \frac{y^2 - xy}{x^3 - y^2}$ i punkten $(x_0, y_0) = (2, 3)$

Lösning. Tangentplanets ekvation till en grafyta $z = f(x, y)$ är

$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \text{ där } z_0 = f(x_0, y_0). \text{ Här har vi } z_0 = \frac{3}{-1} = -3,$$

$$f'_x = \frac{(y^2 - xy)'_x (x^3 - y^2) - (y^2 - xy)(x^3 - y^2)'_x}{(x^3 - y^2)^2} = \frac{-y(x^3 - y^2) - (y^2 - xy) \cdot 3x^2}{(x^3 - y^2)^2},$$

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{-3 \cdot -1 - 3 \cdot 12}{(-1)^2} = -33$$

$$f'_y = \frac{(y^2 - xy)'_y (x^3 - y^2) - (y^2 - xy)(x^3 - y^2)'_y}{(x^3 - y^2)^2} = \frac{(2y - x)(x^3 - y^2) - (y^2 - xy) \cdot -2y}{(x^3 - y^2)^2},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{4 \cdot -1 - 3 \cdot -6}{(-1)^2} = 14. \text{ Detta ger tangentplanets ekvation } z = -3 - 33(x - 2) + 14(y - 3)$$

$$\text{eller } z = -33x + 14y + 21$$

Svar. $z = -33x + 14y + 21$

3. Bestäm alla lokala maximipunkter till $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{-y}$

Lösning. Funktionen är definierad och är differentierbar för alla (x, y) , således en maximipunkt kan finnas endast där båda partialderivator är 0. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_x = -2xe^{-y} = 0 \\ f'_y = (2y - y^2 + x^2)e^{-y} = 0 \end{cases} \quad \text{Då } e^{-y} > 0 \text{ får vi ur den 1:a ekvationen att } x = 0 \text{ och sedan ur den}$$

2:a ekvationen att $2y - y^2 = 0$. Detta ger oss två kritiska punkter $O(0,0)$ och $P(0,2)$. Punkternas karaktär undersöker vi genom Hesses matris

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-y} & 2xe^{-y} \\ 2xe^{-y} & (2-4y+y^2-x^2)e^{-y} \end{pmatrix}. \text{ Då}$$

$$\det H(O) = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0 \text{ är } O \text{ en sadelpunkt. Däremot } H(P) = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{pmatrix}. \text{ Här}$$

har vi $\det H(P) = 4e^{-4} > 0$ och $-2e^{-2} < 0$, således är $P(0,2)$ en lokal maximipunkt, $f(P) = 4e^{-2}$

Svar. $P(0,2)$ är en lokal maximipunkt, $f(0,2) = 4e^{-2}$

4. Beräkna volymen av den ändliga kroppen som begränsas av koordinatplanen samt planet $y=12$ och ytan $x+2z-z^2=1$

Lösning. Ytan $x+2z-z^2=1$ skär planet $x=0$ då $2z-z^2=1$ d.v.s. då $z=1$. Således kan kroppen anges med olikheterna: $0 \leq y \leq 12, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1-2z+z^2$. Då är volymen

$$V = \int_0^{12} dy \int_0^1 dz \int_0^{1-2z+z^2} dx = 12 \int_0^1 (1-2z+z^2) dz = 12 \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = 4$$

Svar. Volymen=4

5. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n} d\sigma$ då där S är ytan till det axelparallella rättblocket med

två av hörnen i punkterna $(0, 0, 0)$ och $(3, 2, 1)$, $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, z^2)$, \hat{n} är utåtriktad enhetsnormal.

Lösning. Enligt divergenssatsen är flödesintegralen $= \iiint_R \text{div} \vec{F} dV$ där R är det axelparallella

rättblocket med två av hörnen i punkterna $(0, 0, 0)$ och $(3, 2, 1)$. Då $\text{div} \vec{F} = 2x + x + 2z = 3x + 2z$ kan integralen skrivas om som

$$\int_0^3 dx \int_0^2 dy \int_0^1 (3x+2z) dz = \int_0^3 dx \int_0^2 [3xz + z^2]_{z=0}^{z=1} dy = \int_0^3 dx \int_0^2 (3x+1) dy = 2 \int_0^3 (3x+1) dx = [3x^2 + 2x]_0^3 = 33$$

Svar. 33

6. Bestäm Taylorpolynomet av tredje ordning till funktionen

$$f(x, y) = \cos(x+y-3) + (y-2)e^{1-x} \text{ kring punkten } (1, 2).$$

Lösning. Om vi betecknar $h = x-1, k = y-2$ blir uttrycket $\cos(h+k) + ke^{-h}$. Då både $h+k$ och $-h$ går mot 0 om $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ kan vi använda MacLaurinutvecklingarna:

$$\cos(h+k) = 1 - \frac{(h+k)^2}{2} + \dots \text{ och } e^{-h} = 1 + (-h) + \frac{(-h)^2}{2} + \dots \text{ Detta ger oss}$$

$$\cos(h+k) + ke^{-h} = 1 - \frac{1}{2}h^2 - hk - \frac{1}{2}k^2 + k - kh + \frac{1}{2}kh^2 + \dots \text{ där punkter döljer termer av grad 3}$$

eller större. Således

$$\text{Svar. } 1 + (y-2) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) - \frac{1}{2}(y-2)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)$$

7. Undersök om vektorfältet $\vec{F} = \left(\frac{2xy}{x^2+1} + \frac{y}{x^2y^2+1}, \ln(x^2+1) + \frac{x}{x^2y^2+1} + 3 \right)$ är konservativt. Om

så är fallet bestäm en potential till \vec{F} .

Lösning. Vi betecknar $P = \frac{2xy}{x^2+1} + \frac{y}{x^2y^2+1}$, $Q = \ln(x^2+1) + \frac{x}{x^2y^2+1} + 3$. Då

$$P'_y = Q'_x = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3x^2y^2+1}{(x^2y^2+1)^2}$$

och denna function är definierad för alla x och y , är fältet \vec{F}

konservativt. Första ansats till potentialen är

$$U = \int P dx = y \int \frac{2x dx}{x^2+1} + \int \frac{y dx}{(xy)^2+1} = y \ln(x^2+1) + \arctan(xy) + g(y),$$

där $g(y)$ är en godtycklig

konstant m.a.p. x , som kan bero på y .

(Vid integrationen har vi substituerad $t = x^2 + 1$ i den 1:a integralen och $t = xy$ i den 2:a. För att

bestämma $g(y)$ skall vi beräkna $\frac{\partial U}{\partial y}$ och jämföra det med Q . Då fås $g'(y) = 3$, vilket ger oss

$$g(y) = 3y + C \text{ och}$$

$$\text{Svar. } U = y \ln(x^2+1) + \arctan(xy) + 3y + C$$

8. Bestäm arean av den delen av konen $x^2 + y^2 = z^2$ som tillhör området $0 \leq yx^2 \leq 1, x \geq 3, z \geq 0$

Lösning. Övre delen av konen (där $z \geq 0$) är grafytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Projektionen på xy -planet

av ytstycket ifråga är ett oändligt område $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}, x \geq 3$. Arealen uttryckas då med en

generaliserad integral

$$\begin{aligned} \int_3^\infty dx \int_0^{1/x^2} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dy &= \int_3^\infty dx \int_0^{1/x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} dy \\ &= \int_3^\infty dx \int_0^{1/x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dy \\ &= \int_3^\infty dx \int_0^{1/x^2} \sqrt{2} dy = \int_3^\infty \frac{\sqrt{2}}{x^2} dx = \left[-\frac{\sqrt{2}}{x} \right]_3^\infty = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Svar. Arealen} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

9. Beräkna linjintegralen $\oint_L (4x + 2y) dx + z dy$ där L är skärningskurvan mellan ytorna

$z = (x-1)^2 + (y+2)^2$ och $2x - 4y + z = 6$. Skärningskurvan genomlöps på så sätt att kurvans projektion på xy -planet genomlöps motsols.

Lösning. En ekvation för kurvans projektion på xy -planet fås genom z -elimination:

$$2x - 4y + (x-1)^2 + (y+2)^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Detta ger oss en parameterframställning:

$x = \cos t, y = \sin t, z = 6 - 2x + 4y = 6 - 2\cos t + 4\sin t$ där t löper från 0 till 2π . Insättning i

$$\begin{aligned} \text{linjeintegralen ger då } & \int_0^{2\pi} (4\cos t + 2\sin t)(-\sin t dt) + (6 - 2\cos t + 4\sin t)\cos t dt = \\ & = \int_0^{2\pi} (-2\cos^2 t - 2\sin^2 t + 6\cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-2 + 6\cos t) dt = [-2t + 6\sin t]_0^{2\pi} = -4\pi \end{aligned}$$

Svar. -4π

10. Det är känt att på ytan $xy+yz+xz=12$ finns en punkt som ligger närmast till planet $x+y+z=1$. Bestäm punkten och avståndet.

Lösning. Avståndet från en allmän punkt $M(x, y, z)$ till planet $x+y+z=1$ är $\frac{|x+y+z-1|}{\sqrt{3}}$

(använd formeln $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ för avståndet från punkten $M(x_0, y_0, z_0)$ till planet

$Ax + By + Cz + D = 0$, eller beräkna beloppet av projektionen $\text{Pr}_{\vec{N}} \vec{PM} = \frac{\vec{PM} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|}$ där \vec{N} är en normalvektor till planet och P en godtycklig punkt på planet). Ytan $xy+yz+xz=12$ skär inte planet

$$(x + y + z = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1 \Leftrightarrow xy + xz + yz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq \frac{1}{2}),$$

således räcker det att hitta punkter på ytan där funktionen $x+y+z-1$ antar minst positivt värde och störst negativt värde (Ytan är en andragsyta och består faktiskt av två sammanhängande delar som ligger på båda sidor av planet). Vi använder Lagranges metod: vi bildar en funktion $F(x, y, z, \lambda) = x + y + z - 1 + \lambda(xy + xz + yz - 12)$ och får ekvationssystemet för extrempunkter

$$\begin{cases} F'_x = 1 + \lambda(y + z) = 0 \\ F'_y = 1 + \lambda(x + z) = 0 \\ F'_z = 1 + \lambda(x + y) = 0 \\ F'_\lambda = xy + xz + yz - 12 = 0 \end{cases}$$

som har två lösningar: 1) $x = y = z = 2, \lambda = -0.5$ och 2) $x = y = z = -2, \lambda = 0.5$. Den 1:a ger en

punkten $A(2, 2, 2)$ som ligger på avståndet $\frac{|2+2+2-1|}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, den 2:a punkten $B(-2, -2, -2)$

som ligger på avståndet $\frac{|-2-2-2-1|}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} > \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Således

Svar. Den närmaste punkten är $A(2, 2, 2)$, avståndet $= \frac{5\sqrt{3}}{3}$