Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004–05–19, kl. 8.00–13.00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:
För betyg 3 krävs godkänt på moment 1–5 plus 3 poäng totalt på uppgifterna 6–10.
För betyg 4 krävs godkänt på moment 1–5 plus 7 poäng totalt på uppgifterna 6–10.
För betyg 5 krävs godkänt på moment 1–5 plus 12 poäng totalt på uppgifterna 6–10.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget.

---

1. Låt $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ vara standardbasen för $\mathbf{R}^3$. För vilka värden på konstanten a utgör vektorerna $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + a\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ en bas för $\mathbf{R}^3$?

2. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1,2,3)$ till ytan $2xy + \frac{z}{x} + \ln(z - y) = 7$.

3. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen
$$f(x,y) = y^3 - x^2 + 2xy - 7y^2 + 9y$$
samt ange deras karaktär.

4. Beräkna linjeintegralen
$$\int_\Gamma (x^2 + xy)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y$$
där Γ är räta linjen $x + y = 1$ från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,1)$.

5. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_{\mathbf{S}} (x + 3, y + 2, z + 1) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$$
där $\mathbf{S}$ är den del av planet $z = 4 - x - 2y$ som projiceras på triangeln med hörnen i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{\mathbf{D}} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, där $\mathbf{D}$ är det ändliga område som begränsas av kurvan $xy = 2$ och linjen $x + y = 3$.

7. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = xy$ då $x^2 + 4y^2 \le 200$, $y \ge 7$.

8. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F} = (y^2 + az, bxy, 3z^2 - x)$, där a och b är konstanter.
   a. Bestäm a och b så att fältet $\boldsymbol{F}$ blir konservativt.
   b. Bestäm för dessa värden på a och b en potential till $\boldsymbol{F}$.
   c. Bestäm för dessa värden på a och b det arbete fältet uträttar längs kurvan
   $$\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, \sin t + \cos t, \sin t)$$
   från punkten $(2,1,0)$ till punkten $(0,1,1)$.

9. Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F} = (xz^2, x^2z, xy^2)$ ut ur kroppen $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$.

V.g.vänd
V.g.vänd

10. Låt $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som består i vridning med vinkeln π kring linjen $(x,y,z) = (t,\ 2t,\ 3t)$. Bestäm, om möjligt, någon bas i vilken matrisen för T är en diagonalmatris och ange denna matris.

Lycka Till!

Lösningsförslag kommer finnas på adressen
http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1133/M/200304/tenta040519.pdf

Lösningsförslag till tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P och T,

5B1133, den 19 maj 2004.

1. Vi har $\boldsymbol{f}_1 = (1,a,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1,1,a)$ och $\boldsymbol{f}_3 = (1,a,1)$. Vektorerna $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ utgör en bas för $\mathbf{R}^3$ om och endast om determinanten

$$\det(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \neq 0$$

dvs om konstanten $a \neq 1$.

Svar: $a \neq 1$.

2. Låt $f(x,y,z) = 2xy + \dfrac{z}{x} + \ln(z - y)$. En normal till ytan $f(x,y,z) = 7$ ges av gradienten

$$\operatorname{grad} f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \left(2y - \frac{z}{x^2}, 2x - \frac{1}{z-y}, \frac{1}{x} + \frac{1}{z-y}\right).$$

Då är $\operatorname{grad} f(1,2,3) = (1,1,2)$ en normalvektor till tangentplanet i punkten $(1,2,3)$. En ekvation för detta plan ges av $\operatorname{grad} f(1,2,3) \cdot (x-1, y-2, z-3) = 0$ alltså $x + y + 2z = 9$.

Svar: $x + y + 2z = 9$.

3. Eftersom funktionen $f(x,y) = y^3 - x^2 + 2xy - 7y^2 + 9y$ har partiella derivator i hela $\mathbf{R}^2$ finns alla lokala extrempunkter bland de kritiska (= stationära) punkterna. Dessa punkter fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_x = -2x + 2y = 0 \\ f'_y = 3y^2 + 2x - 14y + 9 = 0 \end{cases}$$

Ur den första ekvationen fås $y = x$. Den andra ekvationen ger då $x = 1$, $x = 3$ dvs punkterna $(1,1)$ och $(3,3)$.

Vi har $A = f''_{xx} = -2$, $B = f''_{xy} = 2$, $C = f''_{yy} = 6y - 14$ och $AC - B^2 = 24 - 12y$. Man får:

I $(1,1)$ är $AC - B^2 = 12 > 0$ och $A = -2 < 0$ $\Rightarrow$ en lokal maximipunkt.

I $(3,3)$ är $AC - B^2 = -12 < 0$ $\Rightarrow$ en sadelpunkt.

Svar: f:s enda lokala extrempunkt är den lokala maximipunkten $(1,1)$.

4. Vi parametriserar γ: $x = t$, $y = 1 - t$, $dx = dt$, $dy = -dt$, t går från 1 till 0. Detta ger

$$\int_\gamma (x^2 + xy)\,dx + (x + 2y)\,dy = \int_1^0 (t^2 + t - t^2 - t - 2 + 2t)\,dt = \int_1^0 (2t - 2)\,dt = \Big[t^2 - 2t\Big]_1^0 = 1.$$

Svar: 1.

5. Låt $\mathbf{D}$ beteckna triangeln med hörnen i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$. Vi har

$$\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)\,dxdy = \{\ \hat{\boldsymbol{n}} \text{ har positiv } z\text{–komponent}\ \} = (1,2,1)\,dxdy$$

och

$$\iint_{\mathbf{S}} (x+3, y+2, z+1) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (x+3, y+2, z+1) \cdot (1,2,1)\,dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (x+3, y+2, 4-x-2y+1) \cdot (1,2,1)\,dxdy = 12\iint_{\mathbf{D}} dxdy = 12 \cdot \text{arean av } \mathbf{D} =$$

6.

Svar: 6.

6. Kurvan $xy = 2$ och linjen $x + y = 3$ skär varandra då

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3-x) = 2 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2 \\ y_1 = 2, y_2 = 1 \end{cases}$$

alltså i punkterna $(1,2)$ och $(2,1)$. Området $\mathbf{D}$ ges då av $2/x \le y \le 3 - x$, $1 \le x \le 2$. Vi får

$$\iint_{\mathbf{D}} x \, dxdy = \int_1^2 dx \int_{2/x}^{3-x} x \, dy = \int_1^2 x\Big[y\Big]_{2/x}^{3-x} dx = \int_1^2 x(3 - x - 2/x) \, dx =$$

$$= \int_1^2 (3x - x^2 - 2) \, dx = \Big[3x^2/2 - x^3/3 - 2x\Big]_1^2 = 1/6.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 1/6.}$

---

7. Eftersom $f(x,y) = xy$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $x^2 + 4y^2 \le 200$, $y \ge 7$ är sluten och begränsad så antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen eller i en singulär punkt.
Inre kritiska punkter: Dessa fås ur ekvationssystemet $f'_x = y = 0$, $f'_y = x = 0$. Vi får punkten (0,0), men denna punkt tillhör inte den tillåtna mängden.
Kritiska punkter på randen $y = 7$: Man har $f(x,y) = xy = 7x = h(x)$ och ekvationen $h'(x) = 0$ har ingen lösning, alltså det finns inga kritiska punkter på denna del av randen.
Kritiska punkter på randen $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 200 = 0$ fås med hjälp av Lagranges metod: Vi löser ekvationssystemet grad $f = t$ grad g under bivillkoret $g(x,y) = 0$,

$$\begin{cases} f'_x = t g'_x \\ f'_y = t g'_y \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} y = 2tx \\ x = 8ty \\ x^2 + 4y^2 - 200 = 0 \end{cases}$$

Ur $4y \cdot$ ekvation1 $- x \cdot$ ekvation2 fås $x^2 = 4y^2$ vilket, insatt i ekvation3, ger $y = \pm 5$, dvs punkter som inte tillhör den tillåtna mängden.
Ur ekvationssystemet $x^2 + 4y^2 = 200$, $y = 7$ får man skärningspunkterna mellan randkurvorna. Vi får punkterna $(-2,7)$ och $(2,7)$. Några singulära punkter finns inte.
Sammanfattningsvis får vi punkterna $(-2,7)$ och $(2,7)$. I dessa punkter antar f värdena -14 och 14 alltså $\boxed{\textbf{Svar: } \text{Största värdet} = 14, \text{ minsta värdet} = -14.}$

---

8. a. Ett nödvändigt krav för att $\boldsymbol{F}$ skall vara konservativt är att rot $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$. Eftersom $\boldsymbol{F}$ är kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbf{R}^3$, som är enkelt sammanhängande, så är detta krav också tillräckligt. Vi har

$$\text{rot } \boldsymbol{F} = (0, a + 1, by - 2y) = (0,0,0) \iff a = -1 \text{ och } b = 2.$$

$\boxed{\textbf{Svar a: } a = -1 \text{ och } b = 2.}$

b. Vi bestämmer nu en potentialfunktion U till $\boldsymbol{F} = (y^2 - z, 2xy, 3z^2 - x)$, dvs vi söker en funktion $U(x,y,z)$ sådan att grad $U = \boldsymbol{F}$.

$$\begin{cases} U'_x = y^2 - z & (1) \\ U'_y = 2xy & (2) \\ U'_z = 3z^2 - x & (3) \end{cases}$$

Ekvation (1) ger att $U = xy^2 - xz + g(y,z)$. Derivation med avseende på y ger $U'_y = 2xy + g'_y$. Jämförelse med (2) ger att $g'_y(y,z) = 0$, och således är $U = xy^2 - xz + h(z)$. Detta ger att $U'_z = -x + h'$ och jämförelse med (3) ger att $h'(z) = 3z^3$. Således är $h(z) = z^3 + C$ och $U = xy^2 - xz + z^3$ är en potential.

$\boxed{\textbf{Svar b: } U = xy^2 - xz + z^3.}$

c. $\boldsymbol{F}$ är konservativt $\Rightarrow$ arbetet $\boldsymbol{F}$ uträttar är endast beroende av start– och slutpunkterna och är $= U(0,1,1) - U(2,1,0) = -1$.

$\boxed{\textbf{Svar c: } -1.}$

---

9. Kroppens rand består av sfären $\mathbf{S}_1$: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och sfären $\mathbf{S}_2$: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Vi har flödet ut ur kroppen = flödet ut ur $\mathbf{S}_2$ + flödet in i $\mathbf{S}_1$.
Enligt Gauss´sats är

$$\text{flödet ut ur } \mathbf{S}_2 = \iint_{\mathbf{S}_2} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dS = \{ \mathbf{K}_2 : x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \} = \iiint_{\mathbf{K}_2} \text{div } \boldsymbol{F} \, dxdydz =$$

$$= \iiint_{\mathbf{K}_2} z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \{\text{ sfäriska koordinater; } 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \ ,\ 0 \le \varphi \le 2\ \} =$$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^2 \mathrm{d}\varphi \int_0 r^2\cos^2\theta \cdot r^2\sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 \cdot \left[\varphi\right]_0^2 \cdot \left[\frac{-\cos^3\theta}{3}\right]_0 = \frac{128}{15}\ .$$

På samma sätt får vi att

$$\text{flödet in i } \mathbf{S}_1 = \iint_{\mathbf{S}_1} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \{\ \mathbf{K}_1\colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1\ \} = -\iiint_{\mathbf{K}_1} \operatorname{div} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$-\frac{4}{15}$$

alltså flödet ut ur kroppen $= \dfrac{124}{15}$.

Svar: $\dfrac{124}{15}$.

---

10. En sådan bas måste bestå av tre linjärt oberoende egenvektorer till matrisen för T. Av avbildningens geometriska egenskap följer att linjens riktningsvektor $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,3)$ avbildas på sig själv alltså $\boldsymbol{v}_1$ är en egenvektor med egenvärdet $\lambda_1 = 1$. Om $\boldsymbol{v}$ är en vektor som är ortogonal mot $\boldsymbol{v}_1$ så avbildas $\boldsymbol{v}$ på vektorn $-\boldsymbol{v}$ alltså $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor med egenvärdet $\lambda = -1$. Genom att välja två linjärt oberoende vektorer $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$, båda ortogonala mot $\boldsymbol{v}_1$, får vi en bas $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ i vilken T har en diagonalmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

T.ex $\boldsymbol{v}_2 = (2,-1,0)$ och $\boldsymbol{v}_3 = (3,0,-1)$.

Svar: T.ex basen $(1,2,3)$, $(2,-1,0)$, $(3,0,-1)$ och matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
