

Repetition, linjär algebra.

65. Ange standardmatrisen för den linjära avbildningen T , som ges av $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ x + y \\ y + z \end{pmatrix}$.
66. Bestäm en linjär avbildning T , sådan att $T(3,4) = (5,6)$ och $T(2,3) = (7,8)$.
67. För en linjär avbildning T gäller att $T(9,8,7) = (1,1,0)$ och $T(1,1,1) = (1,0,0)$. Bestäm
a. $T(11,10,9)$.
b. någon vektor (x,y,z) som avbildas på $(0,1,0)$.
68. Ange standardmatrisen för den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som är en sammansättning av följande avbildningar:
rotation med vinkeln $\pi/6$, spegling i linjen $x = y$, expansionsion i x -led med faktorn 2, skjuvning i y -led med faktorn 3.
69. Vilken är den geometriska innebörden av den linjära avbildningen som ges av matrisen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$?
70. Skriv vektorn $(1,-2)$ i \mathbb{R}^2 som en linjärkombination av $(2,1)$ och $(3,2)$.
71. Undersök om $(2,-1,6)$ är en linjärkombination av $(1,-2,0)$, $(0,1,2)$, $(5,-6,8)$.
72. Bestäm talet a så att $(1-a, 2, 0)$ och $(6, 4, a+2)$ är linjärt beroende.
73. Vilka av följande vektoruppsättningar är linjärt oberoende:
a. $(-2,0,0)$, $(8,0,-5)$, $(-1,0,3)$ b. $(1,3,-2)$, $(-3,-5,6)$, $(0,5,-6)$?
74. Undersök om vektorerna $(1,2,3)$, $(3,2,1)$, $(2,1,3)$ bildar en bas för \mathbb{R}^3 .
75. Vilka av följande vektoruppsättningar spänner upp \mathbb{R}^3 :
a. $(1,2,3)$, $(0,2,3)$, $(0,0,3)$. b. $(1,0,2)$, $(3,0,1)$, $(5,0,-2)$, $(7,0,-4)$?
76. Bestäm egenvärden och egenvektorer till: a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
77. Vilka av följande matriser är diagonaliserbara:
a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Svar:

65. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 66. $\begin{pmatrix} -13x + 11y \\ -14x + 12y \end{pmatrix}$ 67a. $(3,1,0)$. 67b. $(8,7,6)$.
68. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3}/2 & 3\sqrt{3} - 1/2 \end{pmatrix}$
69. T.ex. först rotation med vinkeln $\pi/2$ och sedan skjuvning i y -led med faktorn 2.
70. $(1,-2) = 8(2,1) - 5(3,2)$. 71. Ja. 72. $a = -2$.
73. b. 74. Bildar en bas. 75. a.
- 76a. $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Motsvarande egenvektorer $(1,1)$, $(-1,1)$.
- 76b. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -4$. Motsvarande egenvektorer $(4,-3,0)$, $(3,4,5)$, $(3,4,-5)$.
77. a, c och d.

78. Sök en matris C sådan att $C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} C$ är en diagonalmatris.
79. Sök en matris C sådan att $C^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} C$ är en diagonalmatris.
80. Matrisen A har egenvärden $-1, 0$ och 2 och motsvarande egenvektorer $(-1, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$ resp. $(2, 1, 3)$. Bestäm A .
81. Bestäm A^{11} då $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
82. Bestäm på huvudaxelform ekvationen för kurvan
a. $11x^2 - 4xy + 14y^2 = 5$. b. $x^2 + 6xy + y^2 = 2$.
83. Bestäm på huvudaxelform ekvationen för ytan
a. $4xy + 4xz + 4yz = 2$. b. $3x^2 + 4xy + 2y^2 + 4xz + 4z^2 = 3$.
85. Låt $A = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Beräkna $C = B^{-1}AB$. Beräkna C^9 . Beräkna A^9 med hjälp av C^9 .
86. Verifiera att $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}$. Utgående från detta, bestäm a, b och c så att

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}.$$
87. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Verifiera att $2A - 5B = C$. Utgående från detta, lös ekvationen $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
88. Visa att likheten $a(1 \ 1 \ -1) + b(0 \ 1 \ 2) + c(3 \ 0 \ 1) = (0 \ 0 \ 0)$ äger rum om och endast om $a = b = c = 0$.
101. Bestäm alla k -värden så att de nedanstående vektorerna i \mathbf{R}^4 blir linjärt oberoende:
a. $(1,1,2,0)$, $(2,3,1,1)$, $(3,4,3,0)$, $(2,k,1,1)$.
b. $(1,1,2,0)$, $(2,3,1,1)$, $(3,4,3,0)$, $(1,2,1,2)$, $(2,k,1,1)$.

Svar:

78. $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 79. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 80. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
81. $\begin{pmatrix} 2048 & -2048 & 2048 \\ 2047 & -2047 & 2048 \\ 2047 & -2047 & 2048 \end{pmatrix}$. 82a. $3u^2 + 2v^2 = 1$. 82b. $2u^2 - v^2 = 1$.
- 83a. $4u^2 - 2v^2 - 2w^2 = 1$. 83b. $2u^2 + v^2 = 1$.
85. $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C^9 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$, $A^9 = \begin{pmatrix} -1027 & 1539 \\ -1026 & 1538 \end{pmatrix}$.
86. $a = -1, b = 4, c = 2$. 87. $x = 2, y = -5$.
101. a. $k \neq 3$. b. Alltid linjärt beroende.

102. Undersök om vektorn $v = (5,6,3)$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,3,1)$ och $v_3 = (4,5,5)$.
103. Undersök om vektorerna
- $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (3,4)$ bildar en bas i \mathbf{R}^2 .
 - $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,3,1)$, $v_3 = (4,5,5)$ bildar en bas i \mathbf{R}^3 .
104. Undersök om man kan bilda en bas i \mathbf{R}^2 bestående av egenvektorer till matrisen
- $$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
- Om så är fallet ange en sådan bas.
105. Låt $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$. Verifiera att A och B är diagonaliserbara men AB är det inte.

7.2, 7.3 i övningsboken

1–9 i <http://www.math.kth.se/~bronek/amelia2/7.2.2.pdf>

Svar:

102. Kan inte.

103. a. Ja.

b. Nej.

104. T.ex $(1,0)$, $(0,1)$.