Dagens, 9 Feb

**1.** Bestäm definitionsmängden och värdemängden till funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{1 - 2x^2 - 3y^2}$$

Skissera definitionsmängden, nivålinjerna och grafen till $f$.

**2.** Skissera grafen och nivålinjerna till funktionen $f(x,y) = x^2$.

**3.** Undersök om mängden $M$ är öppen, sluten, varken öppen eller sluten då $M$ ges i $xy$-planet av:

a. $y - 2x \leq 1$, $x^2 - 3y \leq 2$, $2x + 4y \leq 5$.
b. $y - 2x < 1$, $x^2 - 3y \leq 2$, $2x + 4y \leq 5$.
c. $y - 2x < 1$, $x^2 - 3y < 2$, $2x + 4y < 5$.

**4.** Bestäm inre punkter och randpunkter till mängderna i uppgift 3.

**Svar**

**1.** Definitionsmängden: alla punkter $2x^2 + 3y^2 \leq 1$. Värdemängden: interval $[0,1]$.

**3. a.** Sluten. **b.** Varken sluten eller öppen. **c.** Öppen.

**4.** För alla dessa mängder:
Inre punkter = de punkter som samtidigt uppfyller $y - 2x < 1$, $x^2 - 3y < 2$ och $2x + 4y < 5$.
Randpunkterna: de punkter i a som uppfyller någon av ekvationer $y - 2x = 1$, $x^2 - 3y = 2$, $2x + 4y = 5$.

Dagens, 10 Feb

**1.** En partikel rör sig längs kurvan $r(t) = (2t + t^2, t - t^2, 8t)$. Bestäm partikelns hastighet, fart och accelerationen vid tiden t = 1.

**2.** Betrakta kurvan $x = 2(t + 1)^{3/2}$, $y = 2(4 - t)^{3/2}$.

a. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan i den punkt som svarar mot $t = 3$.
b. Bestäm en ekvation för normalen till kurvan i den punkt som svarar mot $t = 3$.
c. Beräkna längden av kurvan då $2 \leq t \leq 4$.

**3.** Bestm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan:

a. $x = t^2 + 2t + 2$, $y = t^3 + t$ i punkten $(5, 2)$.
b. $r = \sin(v) + \cos(2v)$ i den punkt som svarar mot $v = \pi$ (polära koordinater).

**4.** Berkna längden av kurvan:

a. $x = 3\cos(t) - 4\sin(t)$, $y = 3\sin(t) + 4\cos(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
b. $r = 3\sin(v) + 4\cos(v)$, $0 \leq v \leq \pi/2$, (polära koordinater).
c. $y = \ln(1 - x) + \ln(1 + x)$, $-1/2 \leq x \leq 1/2$.
d. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $2 \leq x \leq 3$.

**5.**

a. Det finns en punkt på kurvan $x = t^3 - 3t + 1$, $y = \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{4}$ där tangenten till kurvan bildar vinkeln $\pi$ med $x$-axel. Bestäm en ekvation för denna tangent.
b. Det finns en punkt på kurvan $x = t^3 - 3t + 1$, $y = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}t^4$ där normalen till kurvan bildar vinkeln $\pi/6$ med $x$-axel. Bestäm en ekvation för denna normal.

**Svar**

**1.** Hastighet $(4, -1, 8)$. Fart 9. Acceleration $(2, -2, 0)$.
**2. a.** $x + 2y = 20$. **b.** $2x - y = 30$. **c.** $2\sqrt{45}$.
**3. a.** $x + y = 7$, $x - y = 3$. **b.** $x + y = -1$, $x - y = -1$.
**4. a.** $10\pi$. **b.** $\frac{5\pi}{2}$. **c.** $2\ln 3 - 1$. **d.** $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$.
**5. a.** $\sqrt{3}x - y = \sqrt{3} - 2$. **b.** $x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3} + 1$.

Dagens, 11 Feb

**1.** Beräkna gränsvärdet (eller visa att det inte finns):

a. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\cos(y)+y^2\cos(x)}{x^2+xy+y^2}$. Tips: undersök gränsvärdet längs linjer $y=x$ och $y=-x$.

b. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+xy+y^2}$. Tips: inför polära koordinater.

**2.** Kan funktionen $f(x,y)=\frac{y^2-xy-2x^2}{y-2x}$ definieras i punkterna på linjen $y=2x$ så att $f$ blir kontinuerlig? Tips: $y^2-xy-2x^2=(y-?).(y-??)$.

**3.** Beräkna partiella derivator till följande funktioner:

a. $f(x,y)=\frac{x-y^2}{1+xy}$.

b. $f(x,y)=\sqrt{1+x^2y}$.

c. $f(x,y,z)=\ln(z^2+xy)$.

**4.** Låt $f$ vara en deriverbar funktion av en variabel. Visa att:

a. funktionen $z=f(\frac{y}{x})$ uppfyller ekvationen $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$. Tips: Sätt $t=y/x$. Vi har då $z=f(t)$ och $z'=f'(t)t'=f'(t)(-y/x^2)$.

b. funktionen $z=f(2x^2+3y^2)$ uppfyller ekvationen $3y\frac{\partial z}{\partial x}-2x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

c. funktionen $z=xyf(\frac{x}{y})$ uppfyller ekvationen $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$.

**Svar**

**1. a.** Finns inte. **b.** 0.

**2.** Funktionen $f$ blir kontinuerlig i hela $xy$-planet om man i varje punkt $(x,y)$ på linjen $y=2x$ definierar $f(x,y)=x+y$.

**3.**

a. $f'_x=\frac{1+y^3}{(1+xy)^2}$, $f'_y=-\frac{2y+x^2+xy^2}{(1+xy)^2}$.

b. $f'_x=\frac{xy}{\sqrt{1+x^2y}}$, $f'_y=\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2y}}$.

c. $f'_x=\frac{y}{z^2+xy}$, $f'_y=\frac{x}{z^2+xy}$, $f'_z=\frac{2z}{z^2+xy}$.