Dagens, 4 maj

1. Beräkna flödesintegralen $\iint_\Sigma F \cdot n d\Sigma$, där:

a. $F = (z, y, x)$ och Σ är den del av planet $x + y + z = 2$ där $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$. Orientering av Σ väljs så att en normal vector har positiva komponenter.

b. $F = (18z, -12, 3y)$ och Σ är den del av planet $2x + 3y + 6z = 12$ som uppfyller villkoren $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Orientering av Σ väljs så att en normal vector r upptriktade till Σ.

c. $F = \text{grad}(\frac{1}{r}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + y^2}$, Σ är den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ som ligger ovanför planet $z = 4$. Orientering av Σ väljs så att en normal vector bildar spetsig vinkel med positiva z-axeln.

d. $F = (x, y, z)$ ut genom sfären med medelpunkt i origo och radien 2. Orientering av sfären väljs så att en normal vector är utåtriktade.

e. $F = (4xz, -y^2, yz)$ ut ur kuben begränsad av planen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ och $z = 1$.

2. Beräkna flödesintegralen $\iint_\Sigma (2y, 0, 3z) \cdot n d\Sigma$, där Σ är den del av planet $3x - z + 2 = 0$ som ligger inom cylindern $x^2 + y^2 = 4$. Orientering av Σ väljs så att en normal vector pekar uppt.

3. Beräkna flödet av vektorfältet F, där:

a. $F = (x^2 + y^2, xz, y^2 - z^2)$ ut ur den slutna ytan som begränsar kroppen $x \geq 0$, $y \geq 0$, $1 \geq z \geq 0$, $2x + y \leq 2$.

b. $F = (x^3 y, xz, yz^3)$ ut ur området $x^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

Svar

1. a. 4. **b.** 24. **c.** $\frac{-2\pi}{5}$. **d.** 32π. **e.** $\frac{3}{2}$.
2. 24π.
3. a. $\frac{-1}{3}$. **b.** $\frac{3\pi}{16}$.

Dagens, 5 maj

1. Beräkna flödet av vektorfältet $F = \mathbf{r} \cdot |\mathbf{r}|^{-2}$, där $r = (x, y, z)$, ut ur området $9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$.

2. Undersök om vektorfältet F är konservativt. Om så är fallet bestäm en potential till F.
a. $F = (3x^2y + y^2 + y, x^3 + 2xy + x, 2z)$
b. $F = (3x^2y + y^2 + y, x^3 + 2xyz + x, 2z)$

3. Betrakta vektorfältet $F = (2xe^{-y}, -\cos z - x^2e^{-y}, y \sin z)$. Visa att F har en potential. Bestäm den potential som har värdet 3 i punkten $(1, 0, \pi)$.

4. Visa att vektorfältet $F = (2xy, x^2 + 2yz, y^2 - 2z)$ har en potential och bestäm denna. Beräkna därefter linjeintegralen $\int_\Gamma F \cdot dr$ då Γ är kurvan $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ från $(1, 0, 0)$ till $(-1, 0, \pi)$.

5. Bestäm konstanten a så att vektorfältet $F = (y+2z, x+2z, ax+2y)$ får en potential U och bestäm denna. Beräkna därefter linjeintegralen $\int_\Gamma \mathrm{grad}(U) \cdot dr$, tagen längs skruvlinjen $r = (\cos t, \sin t, 3t)$ från $(1, 0, 0)$ till $(1, 0, 6\pi)$.

6. Låt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ och $r = |\mathbf{r}|$. Beräkna de av följande uttryck som har mening:
a. $\mathrm{div}(r\ \mathrm{grad}(r^3))$
b. $\mathrm{rot}(\mathbf{r} \cdot \mathrm{grad}(r^3))$
c. $\mathrm{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathrm{grad}(r^3))$

Svar
1. 12π.
2. a. Konservativt. Potential $U = x^3y + xy^2 + xy + z^2$. **b.** Ej konservativt.
3. $U = x^2e^{-y} - y \cos z + 2$.
4. $U = x^2y + y^2z - z^2 + C$; linjeintegralen$=-\pi^2$.
5. $a = 2$. Potentialen $U = xy + 2yz + 2xz + C$, integralen $= 12\pi$.
6. a. $15r^2$. **b.** Har ingen mening. **c.** $9r\mathbf{r}$.