Dagens, 2 Mar

1. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:

a. $f(x, y) = 2xy2 + x^2 + 4y$
b. $f(x, y) = 2x + y + 3\sqrt{1 + x^2 + y^2}$
c. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$.

2. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till följande funktioner:

a. $f(x, y) = 2\ln(x - 2y) + e^{2x-6y}$ kring punkten $(3, 1)$.
b. $f(x, y) = e^{x-1}\cos(x - y)$ kring punkten $(1, 1)$.

3. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till funktionen:

$$f(x, y) = 8\sqrt{x} + 2\cos(2x - y)$$

kring punkten $(1, 2)$. Använd detta polynom för att beräkna ett approximativt värde av $f(1.1, 2.2)$.

4. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:

a. $f(x, y) = xye^{\frac{-(x+y)}{2}}$.
b. $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$.

5. Visa att ekvationen $z^3 - 2xz + y = 0$ definierar i en omgivning av punkten $(1, 1, 1)$ precis en funktion $z = z(x, y)$ sådan att $z(1, 1) = 1$. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till z kring punkten $(1, 1)$.

Svar

1. a. Det finns inga lokala extrempunkter. Det finns en sadelpunkt i $(-1, 1)$.
b. Lokalt minimum i $(-1, -1/2)$.
c. Lokalt minimum i $(1, 1)$. (sadel i $(0, 0)$.)

2. a. $-1 + 4x - 10y + (x - 3)2 - 8(x - 3)(y - 1) + 14(y - 1)2$.
b. $x + (x - 1)(y - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)^2$.

3. $p(h, k) = 10 + 4h - 5h^2 + 4hk - k^2$, där $h = x - 1$ och $k = y - 2$; $f(1.1, 2.2) \simeq 10,39$.

4. a. Lok. max. i $(1, 1)$ och $(-1, -1)$, lok. min. i $(1, -1)$ och $(-1, 1)$.
b. Lok. max. i $(-4, 2)$.

5. $1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2$.

Dagens, 3 Mar

1. Är det sant att $4x^2+3y^2+2\cos(x+y) \geq 2$ om (x,y) ligger tillräckligt nära origo?

2. Verifiera att funktionen $f(x,y) = (1+y)^3x^2 + y^2$ endast har en kritisk punkt och att f antar i denna ett lokalt minimivärde. Är detta värde funktionens minsta värde?

3. Bestäm eventuella lokala extremvärden till följande funktioner:
a. $f(x,y,z) = x^4 + 2y^2 + (z-1)^2 - 4x$.
b. $f(x,y,z) = x^4 + 2x^2 - 2y^2 + (z-1)^2$.

4. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:
a. $f(x,y) = 3x^3 - 9x + 3y - y^3$.
b. $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$.

5. För vilka värden på konstanten a har funktionen

$$f(x,y) = a(x+a)^2 + y^2 - 2y - cos(x-y)$$

ett lokalt extremvärde i punkten $(1,1)$. Bestäm punktens karaktär för dessa a.

6. Visa att det i en omgivning av punkten $(7,7)$ finns precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $z = z(x,y)$ och $w = w(x,y)$ sådana $z(7,7) = 1$, $w(7,7) = 2$, $z^2 + 3w = x$, och $3z + w^2 = y$. Bestäm Taylorpolynomet av första graden till funktionen z kring punkten $(7,7)$. Bestäm ekvationen till tangentplanet till grafen till funktionen z i punkten $(7,7,1)$.

Svar
1. Ja.
2. Lokal minimum i $(0,0)$. Värdet $f(0,0)$ är inte funktionens minsta värde då t.ex $f(0,0) > f(3,-2)$. (Jämför detta med funktioner av en variabel: Om $f(x)$ endast har en kritisk punkt och om f antar i denna ett lokalt minimivärde så är detta värde funktionens minsta värde.)

3. a. Lok. min. -3 i $(1,0,1)$. **b.** Inga extrempunkter.

4. a. Lokalt min i $(1,-1)$, lokalt maximum i $(-1,1)$. (sadel i $(1,1)$ och $(-1,-1)$.)
b. Lokalt minimum i $(2/3,-2/3)$. (sadel i $(0,0)$.)

5. Endast för $a=0$. För $a=0$ är $(1,1)$ en lokal minimipunkt.

6. Taylorpolynomet: $8-4x+3y$. Tangentplanet: $z = 8-4x+3y$.

Dagens, 4 Mar

1. Bestäm det största och det minsta värde funktionen

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2y$$

kan anta på cirkeln $x^2 + y^2 = 4$.

2. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x,y) = 2x + y$$

då punkten (x,y) tillhör ellipsen $x^2 + 2y^2 = 18$.

3. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy - 2x - 4y$$

på och inom triangeln med hörnen i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,2)$.

4. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 4y$$

då $y \geq 1$ och $x^2 + y^2 \leq 9$.

5. Visa att $xy \leq 1$ om $x^4 + y^4 \leq 2$.

Svar

1. 9 och 0.

2. 9 och -9.

3. 0 och $\frac{-16}{7}$.

4. 11 och 3.