Dagens, 2 Feb

1. Hitta egenvärden och egenvectorer till följande matriser:

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad c. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Undersök om man kan bilda en bas bestående av egenvektorer till:

$$a. \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Om så är fallet ange en sådan bas.

3. Bestäm transformationsmatrisen för övergången från:

a. basen $f = \{f_1, f_2\}$ till basen $u = \{2f_1 + 3f_2, 4f_1 + 5f_2\}$ (den nya basen u består alltså av vektorerna u_1 och u_2 med koordinaterna $(2, 3)$ respektive $(4, 5)$ i den gamla basen f).

b. basen $u = \{f_1 + f_2, f_1 + 2f_2\}$ till basen $f = \{f_1, f_2\}$.

c. basen $u = \{f_1 + 2f_2, 2f_1 + f_2\}$ till basen $v = \{f_1 + 5f_2, 3f_1 + 3f_2\}$.

4.

a. Vektorn v har i basen $f = \{f_1, f_2\}$ koordinaterna $(2, 1)$. Vilka är koordinaterna för v i basen $u = \{f_1 + f_2, f_1 + 2f_2\}$?

b. Vektorn v har i basen $u = \{f_1 + f_2, f_1 + 2f_2\}$ koordinaterna $(3, 4)$. Vilka är koordinaterna för v i basen $f = \{f_1, f_2\}$?

5. I $\mathbf{R}^2$ med basvektorer $\{e_1, e_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna $f_1 = (4, 3)$ respektive $f_2 = (3, 2)$ som nya basvektorer $f = \{f_1, f_2\}$.

a. Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den v vektor som i det gamla systemet har koordinaterna $(2, 1)$?

b. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den v vektor som i det nya systemet har koordinaterna $(1, -1)$?

c. Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x - y = 2$?

6. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

$$a. \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad b. \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad c. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

$$a. \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad b. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad c. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Svar

1.

a. $v_1 = (2,1,3)$, $\lambda_1 = 4$, $v_2 = (-2,-1,1)$, $\lambda_2 = 0$, $v_3 = (-1,1,0)$, $\lambda_3 = 1$.
b. $v = (0,0,1)$, $\lambda = 1$.
c. $v_1 = (1,0,1)$, $\lambda_1 = 0$, $v_2 = (0,1,0)$, $\lambda_2 = 2$, $v_3 = (1,0,-1)$, $\lambda_3 = 2$.

2. a. Det kan man inte.
b. Det kan man för att matrisen är symmetrisk. $v_1 = (-4,1,0)$, $\lambda_1 = 4$, $v_2 = (1,-4,\sqrt{17})$, $\lambda_2 = 4 - 2\sqrt{17}$, $v_3 = (1,4,\sqrt{17})$, $\lambda_3 = 4 + 2\sqrt{17}$.

3. a. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. **b.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **c.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. a. $(3,-1)$. **b.** $(7,11)$.

5. a. $(-1,2)$. **b.** $(1,1)$. **c.** $u + v = 2$.

6. a. $v_1 = (0,1)$, $\lambda_1 = -1$, $v_2 = (1,2)$, $\lambda_2 = 3$.
b. $v = (3,2)$, $\lambda = 4$.
c. $v_1 = (1,0)$, $\lambda_1 = 0$, $v_2 = (0,1)$, $\lambda_2 = 0$.

7. a. $v_1 = (1,-1,1)$, $\lambda_1 = 0$, $v_2 = (1,0,2)$, $\lambda_2 = 1$, $v_3 = (1,-1,0)$, $\lambda_3 = 2$.
b. $v_1 = (-1,1,0)$, $\lambda_1 = 1$, $v_2 = (1,0,1)$, $\lambda_2 = 1$, $v_3 = (1,1,1)$, $\lambda_3 = 0$.
c. $v_1 = (-2,-3,1)$, $\lambda_1 = 0$, $v_2 = (1,1,0)$, $\lambda_2 = 1$.

Dagens, 3 Feb

1. En linjär avbildnig har i basen e matrisen A_e och i basen f matrisen A_f. Bestäm:

a. A_f om $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $f = \{e_1 + 3e_2, 2e_1 + 4e_2\}$.

b. A_e om $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $f = \{e_1 + 3e_2, 2e_1 + 4e_2\}$.

c. A_e om $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $e = \{f_1 + 3f_2, 2f_1 + 4f_2\}$.

d. A_f om $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $e = \{f_1 + 3f_2, 2f_1 + 4f_2\}$.

2. Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar och bestäm A^{10}.

3. Undersök om matrisen A är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris C som diagonaliserar matrisen A och ange $C^{-1}AC$.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Undersök om matrisen A är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris C som diagonaliserar matrisen A och ange $C^{-1}AC$.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Bestäm A^{11} då $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. I xy-planet införs nya uv-koordinater genom att man tar vektorerna $u = (1, 2)$ och $v = (2, 5)$ som nya basvektorer. En rät linje har i det nya systemet ekvationen $u + v = 1$. Vilken är linjens ekvation i det ursprungliga systemet?

Svar

1. a. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$. **b.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$. **c.** $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.

d. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$.

2. $A^{10} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & -512 \\ 511 & 513 & -512 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. a. Diagonaliserbar. T.ex. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Ej diagonaliserbar.

c. Diagonaliserbar. T.ex. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. a. T.ex. $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Ej diagonaliserbar.

c. T.ex. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2048 & -2048 & 2048 \\ 2047 & -2047 & 2048 \\ 2047 & -2047 & 2048 \end{pmatrix}$.

6. $3x - y = 1$.

Dagens, 4 Feb

1. Bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen:

a. $3x^2 + 4xy + y^2 = 1$.
b. $3x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

2. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen:

a. $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 5$.
b. $4xy + 3y^2 = 1$.
c. $2y^2 + 4xy - x^2 = 1$

3. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen:

a. $x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 8y = 1$.
b. $x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y = 1$.
c. $x^2 - 2xy + y^2 + 12\sqrt{2}x = 8$.

4. Skriv på huvudaxelform:

a. $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$.
b. $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz = 1$.
c. $x^2 - 2y^2 - z^2 - 4xy + 2xz = 1$.

Svar

1. a. ellips. **b.** hyperbel.
2. a. $2x^2 + y^2 = 1$ ellips. **b.** $4x^2 - y^2 = 1$ hyperbel. **c.** $3x^2 - 2y^2 = 1$, hyperbel.
3. a. $3u^2 - v^2 = 5$, hyperbel. **b.** $u^2 + 3v^2 = 10$, ellips. **c.** $v = u2/6$, parabel.