Dagens, 26/1

1. För en linjär avbildning $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gäller att $A(1,1) = (3,7)$ och $A(2,1) = (4,10)$. Bestäm $A(1,2)$.
(Tips: Skriv $(1,2)$ som en linjär kombination av $(1,1)$ och $(2,1)$, dvs bestäm a och b så att $(1,2) = a(1,1)+b(2,1)$. Lineariteten av A medför att $A(1,2) = aA(1,1) + bA(2,1)$.)

2. För en linjär avbildning $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gäller att $A(e_1) = (1,3,2)$, $A(e_2) = (1,2,1)$ och $A(2,1,-1) = (2,7,4)$. Bestäm matrisen $[A]$.
(Ledning: Skriv e_3 som en linjär kombination av e_1,, e_2, och $(2,1,1)$, dvs bestäm a, b och c så att $e_3 = ae_1 + be_2 + c(2,1,1)$. Lineariteten av A medför att $A(e_3) = aA(e_1) + bA(e_2) + cA(2,1,1)$.)

3. Undersök om $(2,-1,6)$ är en linjärkombination av $(1,-2,0)$, $(0,1,2)$, $(5,-6,8)$.

4. Undersök om vektorerna $(1,2,3)$, $(3,2,1)$, $(2,1,3)$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$.

5. Vilka av följande vektoruppsättningar är linjärt oberoende:

a. $(-2,0,0)$, $(8,0,-5)$, $(-1,0,3)$
b. $(1,3,-2)$, $(-3,-5,6)$, $(0,5,-6)$

6. Avgör om följande vektorer är linjärt oberoende eller beroende eller om de bildar an bas:

a. $(1,3,2,2)$, $(1,0,-1,1)$, $(1,1,0,0)$, $(2,5,3,5)$.
b. $(1,1,0,2)$, $(1,0,2,0)$, $(1,2,0,1)$, $(1,1,0,1)$.
c. $(1,1,0,0)$, $(2,1,0,1)$, $(1,0,0,1)$.
d. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$.
e. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,3)$.
f. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,2)$.
g. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,2)$, $(3,4,3)$.

7.

a. Avgöra om $(1,0,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,3)$ är en bas i $\mathbf{R}^3$. Om den är en bas, hitta koordinaterna av vektorer $(1,0,0)$ och $(1,1,1)$.
b. Avgöra om $(1,0,2)$, $(1,1,1)$, $(1,-2,4)$ är en bas i $\mathbf{R}^3$. Om den är en bas, hitta koordinaterna av vektorer $(0,1,0)$ och $(0,1,1)$.
c. Avgöra om $(1,2)$, $(2,-1)$ är en bas i $\mathbf{R}^2$. Om den är en bas, hitta koordinaterna av vektorer $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

Svar

1. $(5,11)$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Ja.

4. Bildar an bas..

5. b.

6. **a**. Linjärt beroende, inte en bas. **b**. Linjärt oberoende, en bas. **c**. Linjärt beroende, inte bas. **d**. Linjärt oberoende, inte en bas. **e**. Linjärt beroende, inte en bas. **f**. Linjärt oberoende, en bas. **g**. Linjärt beroende, inte en bas.

7. **a**. en bas,

$$(1,0,0) = \frac{-1}{9}(1,0,2) + \frac{8}{9}(2,1,1) + \frac{-2}{9}(3,4,3)$$

$$(1,1,1) = \frac{-8}{9}(1,0,2) + \frac{-8}{9}(2,1,1) + \frac{11}{9}(3,4,3)$$

b. inte an bas.
c. en bas,

$$(1,0) = \frac{1}{5}(1,2) + \frac{2}{5}(2,-1) \qquad (0,1) = \frac{2}{5}(1,2) + \frac{-1}{5}(2,-1)$$

$$(1,1) = \frac{3}{5}(1,2) + \frac{1}{5}(2,-1)$$

Dagens, 27/1

1. För en inverterbar avbildning $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $A(-1,1) = (3,1)$ och $A^{-1}(6,7) = (2,1)$. Bestäm matriserna $[A]$ och $[A^{-1}]$.

2. Undersk om en linjär avbildning $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är inverterbar och om så är fallet bestäm inversen till A då:

a. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bevisa att A och B är inverterbara och hitta $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, $(A^t)^{-1}$.

4. Låt $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Hitta $(A^t)^{-1}$.

5. Är det möjligt att hitta konstanterna a och b så att matrisen A blir an ON matris då:

a. $A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & -b & a \\ -b & 0 & b \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 3a & 5b \\ 2b & 4a \end{pmatrix}$

För alla sådana a och b, hitta A^{-1}.

6. Bevisa att:

$$A(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{x}{\sqrt{6}} + \frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{2z}{\sqrt{6}}\right)$$

är en isometrisk avbildning. Hitta alla vektorer v så att $A(v) = (1,0,0)$. Är A inverterbar? I så fall hitta inversen till A.

7. Undersök sanningshalten i följande påståenden: För varje linjär avbildning $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och för godtyckliga vektorer u och v i $\mathbf{R}^2$ gäller att:

a. Om u och v är ortogonala så är också $A(u)$ och $A(v)$ ortogonala.
b. Om u och v inte är ortogonala så är heller inte $A(u)$ och $A(v)$ ortogonala.

c. Om u och v inte är parallella så är heller inte $A(u)$ och $A(v)$ parallella.
d. Om u och v är parallella så är också $A(u)$ och $A(v)$ parallella.

Svar

1. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $[A^{-1}] = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

2. **a**. Ej inverterbar. **b**. Inverterbar och
$A^{-1}(x, y, z) = (z - x, x + y - 2z, x - y + z)$.

3. $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $(BA)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. a. A är en ON matris om $\left(a = \frac{1}{2} \text{ eller } a = \frac{-1}{2}\right)$ och $\left(b = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ eller } b = \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$. I så fall $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & a & -b \\ b & -b & 0 \\ a & a & b \end{pmatrix}$.

b. Det är omojlight att hitta sådana a och b.

6. $v = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. A är inverterbar och

$$A^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{6}}\ ,\ \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{6}}\ ,\ \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2z}{\sqrt{6}}\right)$$

7.

a. Lögn! Om A är projektionen på x-axeln samt $u = (1, 1)$ och $v = (1, -1)$, så är u och v ortogonala, men $A(u)$ och $A(v)$ inte.
b. Lögn! Om A är projektionen på x-axeln samt $u = (1, 1)$ och $v = (0, 1)$, så är u och v inte ortogonala, medan $A(u)$ och $A(v)$ Är det.
c. Lögn! Exempel i svaret till a visar att $A(u)$ och $A(v)$ kan vara parallella även om u och v inte är det.
d. Sant!

Dagens, 28/1

1. Undersök om v är en egenvektorer till följande matrisen och ange då motsvarande egenvärde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. $v = (1, 1, 1, 1)$. b. $v = (1, -1, 1, 1)$.

2. Matrisen A har egenvärden 2, 3, och 4 med motsvarande egenvektorer $(1, 3, 1)$, $(1, 1, 0)$, resp. $(1, 2, 1)$. Bestäm A.

3. Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Verifera att vektorerna $u = (0, 1)$, $v = (1, 4)$ är egenvektorer till A.

b. Ange motsvarande egenvärden.

Svar

1. a. Egenvektor, egenvärde 5. b. Ej egenvektor.

2. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. b. Motsvarande egenvärden är 2 respektive 3.