Dagens, 23 Feb

I uppgifterna 1-5 förutstter vi att funktionen f har kontinuerliga derivator av första och andra ordningen.

1. Funktionen $z(u,v)$ definieras genom $z(u,v) = f(x,y)$ där $x = u+v$ och $y = uv$. Verifiera att

a. $uz'_u + vz'_v = xf'_x + 2yf'_y$.
b. $z''_{uv} = f''_{xx} + yf''_{yy} + xf''_{xy} + f'_y$..

2. Bestäm z''_{uv} då $z = f(x,y)$, $x = u^2+v^2$ och $y = uv$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

3. Bestäm $z''_{uu} + z''_{vv}$ då $z = f(x,y)$, $x = u^2+v^2$ och $y = u-v$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

4. Bestm $z''_{uu} + z''_{vv}$ då $z = f(x,y)$, $x = u^2+v^2$ och $y = u^2-v^2$. Svaret får inte innehålla va- riabler u och v.

5. En funktion $z(x,y)$ uppfyller ekvationen $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$. Hur förändras denna ekvation om man ersätter funktionen z med funktionen f enligt $z = f(u,v)$, $u = x-y$, $v = x+y$?

6. Låt $u = 2x+3y$ och $v = xy$. Sätt $z(x,y) = f(u,v)$. Bestäm:

a. $xz'_x + yz'_y$. Svaret får inte innehålla variabler x och y.
b. z''_{xy}. Svaret får inte innehålla variabler x och y.

7. Bestäm konstanten a så att funktionen $z = (3x-2y)f(x+ay)$ satisfierar ekvationen $2z'_x + 3z'_y = 0$, då f är en godtycklig, deriverbar funktion av en variabel.

8. Transformera uttrycket $z''_{xx} - 2xz''_{xy} + x^2 z''_{yy}$ genom $x = u$, $y = v - \frac{u^2}{2}$.

Svar

2. $4yf''_{xx} + yf''_{yy} + 2xf''_{xy} + f'_y$.

3. $4xf''_{xx} + 2f''_{yy} + 4yf''_{xy} + 4f'_x$.

4. $4xf''_{xx} + 4xf''_{yy} + 8yf''_{xy} + 4f'_x$.

5. $f''_{uv} = 0$ (man kan förkorta med 4).

6. **a.** $uf'_u + 2vf'_v$. **b.** $6f''_{uu} + uf''_{uv} + vf''_{vv} + f'_v$.

7. $a = \frac{-2}{3}$.

8. $z''_{uu} + z'_v$.

Dagens, 24 Feb

1. Bestm J_f, $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{d(y,z)}$ då $f(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2+z^2, x+2y+3z)$.

2. Bestm Jacobimatriserna till följande funktioner:
a. $f(x,y) = (xy, x^2y^3, x+2y)$.
b. $f(x,y,z) = (xy+z^2, x^2y^3z^4)$.

3. Beräkna J_{gf}, $\frac{df}{du}$, och $\frac{df}{d(u,v)}$ i origo, då:

$$f(u,v) = (2u-3v, 3u+2v, 4uv+1) \qquad g(x,y,z) = (xy, yz, xz)$$

4. Visa att ekvationen $x^y + \sin(y) = 1$ definierar y som funktion av x i en omgivning av punkten $(1,0)$ och beräkna $y'(1)$.

5. Visa att ekvationen $xy^2 + e^{2x-y} = 5$ definierar i en omgivning av punkten $(1,2)$ precis en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(1) = 2$. Beräkna $y'(1)$.

Svar

1. $J_f = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\frac{df}{dx} = \begin{pmatrix} yz \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{df}{d(y,z)} = \begin{pmatrix} xz & xy \\ 2y & 2z \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. a. $\begin{pmatrix} y & x \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **b.** $\begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2xy^3z^4 & 3x^2y^2z^4 & 4x^2y^3z^3 \end{pmatrix}$.

3. $J_{gf} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\frac{df}{du} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{df}{d(u,v)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 0.

5. $y'(1) = -2$.

Dagens, 25 Feb

1. Låt $u = 2x + \sin(y)$, $v = \sin(x) + y + 1$. Visa att funktionen $f(x, y) = (u, v)$ är lokalt inverterbar. Beräkna, i punkten $(u, v) = (0, 1)$, de partiella derivatorna $\frac{dx}{du}$ och $\frac{dy}{du}$ samt inversens Jacobimatris.

2. Visa att det i en omgivning av punkten $(2, 0, 1)$ finns precis en funktion $z = z(x, y)$ som uppfyller ekvationen $z^3 + 3xz - 3y + 7 = 0$ och sådan att $z(2, 0) = 1$. Beräkna $z'_x(2, 0)$ och $z'_y(2, 0)$.

3. Visa att det i en omgivning av punkten $(1, 0, 2)$ finns precis en funktion $z = z(x, y)$ som uppfyller ekvationen $z^3 + 3yz - 2x - 6 = 0$ och sådan att $z(1, 0) = 2$. Beräkna $z'_x(1, 0)$ och $z'_y(1, 0)$.

4. Visa att det i en omgivning av origo finns en funktion $z(x, y)$ som satisfierar ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x^2z - yz - z = 0$. Beräkna för denna funktion z'_x och z'_y.

5. Visa att det i en omgivning av punkten $(1, 1, 1)$ finns precis en funktion $z = z(x, y)$ som uppfyller ekvationen $x^3+y^3+z^3+x^2z-yz-z = 2$ och sådan att $z(1, 1) = 1$. Bestäm för denna funktion:

a. $z'_x(1, 1)$ och $z'_y(1, 1)$
b. $\text{grad}(z)(1, 1)$
c. riktningsderivatan i punkten $(1, 1)$ i riktning av vektorn $v = (2, -6)$.

Svar

1. $\frac{dx}{du} = 1$, $\frac{dy}{du} = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $z'_x(2, 0) = \frac{-1}{3}$, $z'_y(2, 0) = \frac{1}{3}$.

3. $z'_x(1, 0) = \frac{1}{6}$, $z'_y(1, 0) = \frac{-1}{2}$.

4. $z'_x = \frac{-3x^2-2xz}{3z^2+x^2-y-1}$, $z'_y = \frac{-3y^2+z}{3z^2+x^2-y-1}$.

5. **a.** $z'_x(1, 1) = \frac{-5}{2}$, $z'_y(1, 1) = -1$. **b.** $\text{grad}(z)(1, 1) = (\frac{-5}{2}, -1)$.
c. $\frac{\sqrt{10}}{20}$.