Dagens 19/1

1. Låt:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Beräkna $\det(A)$, $\det(2A)$, $\det(B)$, $\det(2B)$, $\det(C)$, $\det(2C)$

2. Beräkna area/volum av:

a. parallellogrammen i $\mathbf{R}^2$ med horn i punkterna $(1, -1)$, $(10, 1)$, $(3, -10)$;

b. parallellogrammen i $\mathbf{R}^3$ med horn i punkterna $(0, -1, 0)$, $(-1, -1, -1)$, $(4, 2, 0)$, $(3, 3, -10)$.

3.

a. Bestäm k så att **punkterna** $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(k, -1)$ ligger på en rät linje i $\mathbf{R}^2$.

b. Bestäm k så att **punkterna** $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 0)$, $(k, 0, 1)$, $(0, k, 2)$ ligger på ett plan i $\mathbf{R}^3$.

4.

a. Bestäm k så att **vektorerna** $(k, k-1)$ och $(6, k^2-1)$ är parallella i $\mathbf{R}^2$.

b. Bestäm k så att **vektorerna** $(k+3, 5, 4)$, $(5, k+3, 5)$, $(k-7, -5, k-7)$ ligger på ett plan i $\mathbf{R}^3$.

Svar

1. -2, -8 -41, -328, 3, 48.

2. **a.** 85. **b.** 23.

3. **a.** $-1/2$. **b.** 0 eller $13/3$.

4. **a.** 1, 2, -3. **b.** 1, 2.

Dagens 20/1

1. Avgör vilka av följande avbildningar i $\mathbf{R}^2$ är linjära och om så är fallet ange matriser för dessa. Varje vektor:

a. förlängs med en faktor 2.
b. speglas i origo.
c. adderas till vektorn $(1, 2)$.
d. avbildas på vektorn $(0, 0)$.
e. avbildas på vektorn $(1, 1)$.
f. speglas i linjen $x + y = 0$.
g. projiceras på linjen $y = 2x$.

2. En linär avbildning A har matrisen $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Låt $u = (3, -1)$. Bestäm $A(u)$.
b. Bestäm alla vektorer v så att $A(v) = (3, -1)$.
c. Bestäm bilden av linjen $x - 2y = 0$, dvs beskriv mängden av alla punkter $A(x, y)$ där (x, y) uppfyller linjens ekvation.

3. För en linjär avbildning $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $A(2, 1) = (1, 3)$ och $A(-1, 1) = (1, 1)$. Bestäm matrisen $[A]$ för A.

Tips: Antag att $[A] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Lös ekvationssystemet:
$[A] \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $[A] \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Två linära avbildningar A och B, av typen $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, ges enligt följande:

$$A(x, y) = (x + y, x - y) \qquad [B] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm matriserna för avbildningarna $\frac{1}{2}AB$ och $\frac{1}{2}BA$ och beräkna $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(\frac{1}{2}AB)$, $\det(\frac{1}{2}BA)$.

5. Undersök antalet lösningar till ekvationssystemet för olika värden på konstanten k:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & k-3 \\ 2 & k-1 & 0 \\ 4 & 2k-2 & k-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ k/2 \\ 2+k \end{pmatrix}$$

Svar

1. a. Linjär, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **b.** Linjär, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **c.** Ej linjär.

d. Linjär, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **e.** Ej linjär. **f.** Linjär, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

g. Linjär, $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$.

2. a. $(1, 5)$. **b.** $(-7, 5)$ **c.** linjen $5x - 2y$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $\frac{1}{2}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -2$, $\det(B) = 2$, $\det(\frac{1}{2}AB) = -2$, $\det(\frac{1}{2}BA) = -2$.

5. För $k \neq 3$ och $k \neq 1$, bara en lösning. För $k = 3$, ingen lösning. För $k = 1$, oandligt många lösningar.

Dagens 21/1

1. Skriv vektorn $(1, -2)$ i $\mathbf{R}^2$ som en linjr kombination av $(2, 1)$ och $(3, 2)$.

2. Betrakta vektorerna $(1, 1, 2)$, $(1, 0, 1)$ och $(2, -2, 0)$.

a. Är vektorn $(1, 1, 1)$ en linjr kombination av dessa vektorer?
b. Är vektorn $(1, 1, 2)$ en linjr kombination av dessa vektorer?

3. Avgör om följande vektorer är linjärt oberoende eller ej:

a. $(1, 3, 2, 2)$, $(1, 0, -1, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$. (Vektorerna u, v, w är linjärt oberoende om och endast om likheten $au + bv + cw = 0$ inträffar endast för $a = b = c = 0$.)
b. $(1, 1, 0, 2)$, $(1, 0, 2, 0)$, $(1, 2, 0, 1)$.
c. $(1, 1, 0, 0)$, $(2, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$.
d. $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$.
e. $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 4, 3)$.
f. $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 4, 2)$.
g. $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 4, 2)$, $(3, 4, 3)$.

4. Undersök om vektorerna i d, e, f, och g i uppgiften 3 bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.

5.

a. Visa att vektorn $u = (1, 2, 3, 4)$ är en linjär kombination av vektorerna $v = (1, 2, 2, 3)$ och $w = (1, 2, 1, 2)$. (Dvs. visa att det finns konstanter a och b sådana att $u = av + bw$.)
b. Är vektorn $u = (2, 3, 4, 5)$ en linjr kombination av vektorerna v och w?

Svar

1. $(1, -2) = 8(2, 1) - 5(3, 2)$.

2. a. nej. **b.** ja.
3. a. linjärt oberoende. **b.** linjärt oberoende. **c.** linjärt beroende. **d.** linjärt oberoende. **e.** linjärt beroende. **f.** linjärt oberoende. **g.** linjärt beroende.
4. d. bildar inte en bas. **e.** bildar inte en bas. **f.** bildar en bas. **g.** bildar inte en bas.
5. b. Nej.