Dagens, 18 maj

1. Beräkna linjeintegralen:

a. $\int_\Gamma y\ ds$ då Γ är parabelbågen $x = \sqrt{2}\ y^2$ mellan punkterna $(0,0)$ och $(\sqrt{2}, 1)$.

b. $\int_\Gamma \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ds$ då Γ är sträckan mellan punkterna $(0,0,0)$ och (a,b,c).

c. $\int_\Gamma xy\ ds$ då Γ är kvartscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i första kvadranten.

2. Beräkna ytintegralen:

a. $\iint_\Sigma z\ d\Sigma$ då Σ är den del av planet $x + y + z = 1$ som uppfyller $x^2 + y^2 \leq 1$.

b. $\iint_\Sigma y + 2z\ d\Sigma$ då Σ är den del av planet $2x + 3y + 6z = 12$ som ligger i första oktanten ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

c. $\iint_\Sigma x + y + z\ d\Sigma$ då Σ definieras av $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 2$, $x \leq 0$.

3. Betrakta funktionen $f(x,y,z) = xy + x^2 z + yz^2$. Ange vilka av mening och ber{"akna dem:

a. div rot f
b. div grad f
c. grad rot f
d. grad div f
e. rot grad f
f. rot div f

4. Betrakta vektorfältet $F = (x^3 - y^3, 3yz, y^3 + z^3)$. Ange vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem:

a. grad div rot F
b. grad rot div F
c. div grad rot F
d. div grad div F
e. rot div grad F
f. rot rot rot F

Svar

1. a. $\frac{13}{12}$. **b.** $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$. **c.** $\frac{1}{2}$.
2. a. $\sqrt{3}\pi$. **b.** $\frac{112}{3}$. **c.** $36 + 6\pi$.
3. Bara div grad $f = 2y + 2z$ och rot grad $f = (0,0,0)$ har mening.
4. Bara grad div rot $F = (0,0,0)$, div grad div $F = 12$, och rot rot rot $F = (-6, 0, -6)$ har mening.

Dagens, 19 maj

1. Beräkna linjeintegralen:

a. $\int_\Gamma (x^2+y^2)\,ds$ då Γ ges av $x = 4t-1$, $y = 3t+1$, $-1 \le t \le 1$.

b. $\int_\Gamma (2x + x2 - 9y)\,ds$, då Γ är parabelbågen $9y = x^2$ mellan punkterna $(0,0)$ och $(6,4)$.

c. $\int_\Gamma \frac{dx+2dy}{x+2y}$ då Γ är kvartscirkeln $x^2+y^2 = 1$ $x \ge 0$, $y \ge 0$ från $(1,0)$ till $(0,1)$.

2. Beräkna linjeintegralen:

a. $\int_\Gamma (xy+y)\,ds$ då Γ ges av $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 4t$, $0 \le t \le \pi$.

b. $\int_\Gamma x\sin(x-y)dx + y\cos(x-y)dy$, då Γ går från punkten $(1,1)$ till punkten $(3,3)$ längs linjen $x - y = 0$.

3. Beräkna ytintegralen:

a. $\iint_\Sigma z\,d\Sigma$ då Σ är den del av planet $2x+2y+z = 2$ som uppfyller $x^2+y^2 \le 2$.

b. $\iint_\Sigma z(x^2+y2)\,d\Sigma$ då Σ är den del av halvsfäriska ytan $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \ge 0$.

c. $\iint_\Sigma \frac{d\Sigma}{\sqrt{x^2+y^2+y^2}}$ där Σ ges av $x^2+y^2+z^2 = 4$,$x^2+y^2 \le 1$, $z > 0$.

4. Beräkna flödesintegralen:

a. $\iint_\Sigma (0,0,z)\cdot n\,d\Sigma$ där Σ är den del av planet $x+y+z = 2$ som uppfyller $x^2+y^2 \le 1$. Vektorn n har positiv z-komponent.

b. $\iint_\Sigma (x,y,z)\cdot n\,d\Sigma$ då Σ är den totala begräsningsytan till cylindern $x^2+y^2 \le 1$, $0 \le z \le 1$ och n är ytans utåtriktade normal.

c. $\iint_\Sigma (\text{rot } F)\cdot n\,d\Sigma$, då Σ är övre halvan av sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$, n är den uppåtriktade normalen och $F = (x+y, 2x+2yz, y^2+z)$.

Svar

1. a. $\frac{31}{3}$. **b.** 49. **c.** $\ln 2$.
2. a. 30. **b.** 4.
3. a. 12π **b.** $\frac{\pi}{2}$. **c.** $2\pi(2-\sqrt{3})$
4. a. 2π **b.** 2π. **c.** π.