Dagens, 16 Feb

**1.** Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan:
a. $z = x\ln(5x - 2y)$ i punkten $(1, 2, 0)$.
b. $z = \frac{8x}{y} - xy + 1$ i punkten $(1, 2, 3)$.

**2.** Beräkna de partiella derivatorna av andra ordningen till följande funktioner:
a. $f(x, y) = xy^2 + \frac{y}{x}$
b. $f(x, y) = \frac{y}{x-2y}$
c. $f(x, y) = \ln(1 - xy)$
d. $f(x, y) = \arctan\left(\frac{1-2xy}{2x+y}\right)$

**3.** Bestäm alla punkter på ytan $z = x^2 + 4y^2$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $x + y + z = 0$.

**4.** Bestäm en linjär approximation till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y\sin(1 - \sqrt{1 - 2x + 4y})$$

i en omgivning till punkten $(2, 1)$ och beräkna ett approximativt värde av $f(2.1, 1.2)$.

**5.** Bestäm ekvationen till tangentplanet och normalen till ytan:

$$z = x + y + 2\arctan\left(\frac{y - 2x}{x + y}\right)$$

i punkten $(1, 2, 3)$.

## Svar

**1. a.** $5x - 2y - z = 1$. **b.** $2x - 3y - z + 7 = 0$.

**2.**
**a.** $f''_{xx} = \frac{2y}{x^3}$, $f''_{yy} = 2x$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 2y - \frac{1}{x^2}$.
**b.** $f''_{xx} = \frac{2y}{(x-2y)^3}$, $f''_{yy} = \frac{4x}{(x-2y)^3}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x+2y}{(2y-x)^3}$.
**c.** $f''_{xx} = \frac{-y^2}{(xy-1)^2}$, $f''_{yy} = \frac{-x^2}{(xy-1)^2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{-1}{(xy-1)^2}$.
**d.** $f''_{xx} = \frac{16x}{(4x^2+1)^2}$, $f''_{yy} = \frac{2y}{(y^2+1)^2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 0$.

**3.** $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{8}, \frac{5}{16})$

**4.** $L(x, y) = 5x - 2y - 4$ och $f(2.1, 1.2) \simeq 4.1$.

**5.** Tangentplan: $x - 2y + z = 0$. Normal: $(1, 2, 3) + t(1, -2, 1)$ för $t \in \mathbf{R}$.

Dagens, 17 Feb

**1.** Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan:
a. $x^3 + 2y^3 + 3z^3 + xyz = 7$ i punkten $(2, -1, 1)$.
b. $xy^3 + \frac{9y}{z} - x^3z^2 = 5$ i punkten $(1, 2, 3)$.
c. $\frac{z}{x-y^2} + \ln(z - xy) = 3$ i punkten $(2, 1, 3)$.

**2.** I vilken punkt är planet $2x + y - 3z = 8$ tangentplan till ellipsoiden $x^2 + y^2 + 3z^2 = 8$?

**3.** Låt $f(x, y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen:

$$x = 2u + 3v,\ y = 4u - 6v$$

får vi en ny funktion $z = f(2u + 3v, 4u - 6v)$ av variabler $u$ och $v$. Bestäm $3z'_u - 2z'_v$.
Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u = 2f'_x + 4f'_y$.

**4.** Låt $f(x, y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen

$$x = 2u + 3v,\ y = \frac{u}{v}$$

får vi en ny funktion $z = f(2u + 3v, \frac{u}{v})$ av variabler $u$ och $v$. Bestäm $uz'_u + vz'_v$.
Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u = 2f'_x + \frac{1}{v}f'_y$.

**Svar**
**1. a.** $11x + 8y + 7z = 21$. **b.** $19x - 15y + 8z = 13$.**c.** $2x - 2y - z + 1 = 0$.

**2.** $(2, 1, -1)$.

**3.** $24f'_y$.

**4.** $xf'_x$.

Dagens, 18 Feb

**1.** Beräkna riktningsderivatan till funktionen $f(x, y) = \frac{y}{x} + xy^2$ i punkten $(1, 2)$ i riktning av vektorn $v = (3, 4)$.

**2.** Beräkna riktningsderivatan till funktionen $f(x, y, z) = x \arctan\left(\frac{y}{z}\right)$ i punkten $(5, 2, -1)$ i riktning av vektorn $(0, -3, 4)$.

**3.** I vilken riktning bör punkten $(x, y)$ röra sig utgående från $(1, 2)$ för att värdet av $xy - 5\ln(x + y^2)$ skall växa så snabbt som möjligt?

**4.** Låt $f(x, y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$ får vi en ny funktion $z = f\big(uv, \frac{u}{v}\big)$ av variabler $u$ och $v$. Bestäm $uz'_u + vz'_v$.
Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u = vf'_x + 1vf'_y$.

**5.**

a. Beräkna riktningsderivatan $f'_v$ till funktionen $f(x, y) = \frac{x+6y}{x+y}$ i punkten $(1, 0)$ i riktning av vektorn $v = (4, 3)$.
b. Finns det någon vektor $u$ sådan att $f'_u(1, 0) = 6$?

**Svar**

**1.** $\frac{26}{5}$.

**2.** $-1$.

**3.**$(1, -3)$.

**4.** $2xf'_x$.

**5.** **a.** $f'_v(1, 0) = 3$. **b.** Nej.