

Dagens, 13 April

1. Beräkna (eller visa divergens) följande generaliserade dubbelintegraler:

- $\iint_D \frac{1}{x} dx dy$  då  $D$  ges av  $0 \leq xy \leq 1, x > 1$ .
- $\iint_D \frac{1}{(x+y)^4} dx dy$  då  $D$  ges av  $x \geq 1, y \geq 0$ .
- $\iint_D \frac{1}{(x+1)(y+1)} dx dy$  då  $D$  ges av  $0 \leq y \leq x, x \geq 0$ .
- $\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy$  då  $D$  är kvadraten  $0 < x < 1, 0 < y < 1$ .
- $\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^3)^{\frac{3}{2}}} dx dy$  då  $D = \mathbf{R}^2$ .

2. Undersök konvergensen av den generaliserade dubbelintegralen:

$$\iint_D \frac{1}{x+y^4} dx dy$$

då  $D$  ges av  $0 \leq y \leq 1, x \geq 1$ .

3. Undersök konvergensen av den generaliserade dubbelintegralen:

- $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$  då  $D$  ges av  $x^2 + y^2 \geq 1$ .
- $\iint_D \frac{1}{x^2+y^3} dx dy$  då  $D$  är första kvadranten.

**Svar**

- a.** 1. **b.**  $\frac{1}{6}$ . **c.** Integralen är divergent. **d.** 4. **e.**  $2\pi$ .
- Integralen är divergent.
- a.** konvergent. **b.** divergent.

Dagens, 14 April

1. Beräkna följande trippelintegraler:

- $\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$  då  $K$  är kuben  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  och  $0 \leq z \leq 1$ .
- $\iiint_K xyz dx dy dz$  då  $K$  ges av  $0 \leq y \leq 1 - x$ ,  $0 \leq z \leq 1 - x - y$  och  $0 \leq x \leq 1$ .
- $\iiint_K z dx dy dz$  då  $K$  ges av  $x + y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1 - y^2$ ,  $x \geq 0$ , och  $y \geq 0$ .
- $\iiint_K (x^2 + y^2 - z^2) dx dy dz$  då  $K$  är klotet  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .
- $\iiint_K \cos(x) \cos(y) \cos(z) dx dy dz$  då  $K$  ges av  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ , och  $x + y + z \leq \pi$ .

2. Beräkna följande dubbelintegraler:

- $\iint_D \frac{(x+y)^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$  då  $D$  är cirkelskivan  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
- $\iint_D \frac{x+y}{(2-x+y)^{\frac{3}{2}}} dx dy$  då  $D$  är rektangeln  $0 \leq x+y \leq 2$ ,  $-1 \leq x-y \leq 1$ .
- $\iint_D (x-y)e^{x+y} dx dy$  då  $D$  är kvadraten med hörn i punkterna  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,2)$  och  $(-1,1)$ .

Svar

- 1.
  - $\frac{1}{720}$ .
  - $\frac{11}{69}$ .
  - $\frac{4\pi}{15}$ .
  - $\frac{\pi}{8}$ .
- $\pi(1 - \ln(2))$ .
  - $\ln(3)$ .
  - $1 - e^2$ .

Dagens, 15 April

1. Beräkna trippelintegralen:

a.  $\iiint_K \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz$  då  $K$  är klotet  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

b.  $\iiint_K \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz$  då  $K$  begränsas av planen  $x + y + z = 1$ ,  
 $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

2. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av:

a. cylindrarna  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = y^2$ , och planet  $z = 0$ .

b. ytan  $|x| + |y| = 2$  samt planen  $2x + y + z = 6$  och  $x + y + z = 5$ .

3. Beräkna arean av den del av ytan  $z = 1 + y^2$  som svarar mot  $|x| \leq y \leq 1$ .

4. Beräkna följande dubbelintegraler:

a.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  då  $D$  ges av  $x^2 + y^2 \leq y$ ,  $x \geq 0$ .

b.  $\iint_D e^x dx dy$  då  $D$  är parallelogrammen som begränsas av linjerna  
 $x + y = 1$ ,  $x + y = 3$ ,  $3x + y = 2$ , och  $3x + y = 4$ .

**Svar**

1. a.  $4\pi - \pi^2$ . b.  $\frac{8 \ln(2) - 5}{16}$ .

2. a.  $\frac{\pi}{4}$ . b.  $\frac{26}{3}$ .

3.  $\frac{5\sqrt{5}-1}{6}$ .

4. a.  $\frac{2}{9}$ . b.  $2e^{\frac{3}{2}} - 4e^{\frac{1}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}}$ .