Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 5A, onsdagen den 16 oktober 2008, 09.15–10.15, i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	En Hamiltoncykel passerar genom varje nod precis en gång.	x	
b)	Det finns träd som saknar noder av valens 1.	x	(x)
c)	Den kompletta bipartita grafen $K_{n,m}$ har en Eulerkrets om och endast om talen n och m är jämna.	x	
d)	En graf kan ha ett udda antal noder med udda valens		x
e)	Det finns sammanhängande grafer med 85 noder och 83 kanter.		x
f)	Den kompletta grafen K_6 är ej planär.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Grafen G är acyklisk, har två komponenter med tillsammans 73 noder. Ange antalet kanter som grafen har.

SVAR: 71, (ty grafen är en skog och för varje träd i skogen är antal kanter ett minder än antalet noder i trädet.)

b) (1p) Har grafen med nedanstående grannodtabell en Eulerkrets

a	b	c	d	e	f
b	a	b	c	d	e
f	f	f	f	f	a
	c	d	e		b
					c
					d

SVAR: Nej (ty alla noder har ej jämn valens eftersom valenserna är 2, 3, 3, 3, 2, 5.)

c) (1p) Visa t ex med ett exempel vad som menas med en alternerande stig till en matchning.

SVAR: En alternerande stig till en matchning börjar i en omatchad X-nod och slutar i en omatchad Y-nod samt dessutom gäller att varannan kant i stigen tillhör matchningen.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm antalet områden som uppstår vid en plan ritning av grafen G om G är sammanhängande, har en nod med valensen 1, två noder med valensen 2, tre noder med valensen 3 och en nod med valensen 4. Ytterområdet skall räknas med.

LÖSNING: Antalet kanter $|E|$ i grafen fås ur formeln $\sum_{v\in V}\delta(v) = 2|E|$ till

$$|E| = \frac{1}{2}(1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 1\cdot 4) = 9.$$

Eulers formel $v + r = e + 2$ ger nu att antalet områden r är lika med

$$r = e + 2 - v = 9 + 2 - (1 + 2 + 3 + 1) = 4.$$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm en komplett matchning i den bipartita grafen med noder $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$ och kanterna

$$E = \{(1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (3, b), (4, a)(4, b), (4, e), (5, c), (5, d)\}.$$

.

LÖSNING: Matchningen $M = \{(1, c), (2, a), (3, b), (4, e), (5, d)\}$, som vi hittade visuellt, uppfyller alla krav på att vara en komplett matchning.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bestäm antalet olika spännande träd till den kompletta bipartita grafen $K_{3,2}$

LÖSNING: Kalla X-noderna för x_1, x_2 och Y-noderna för y_1, y_2, y_3. Totalt finns $2 \cdot 3 = 6$ noder i grafen, eftersom grafen är en komplett bipartit graf. Ett spännande träd skall ha 4 kanter eftersom antalet noder är $2 + 3 = 5$. Två kanter skall alltså tas bort. Vi ser när vi ritar grafen att vi kan inte ta bort de två kanter som går till noden y_1, ej heller till noden y_2 och resp y_3, annars kan vi ta bort vilka som helts två kanter.

Av de 6 kanterna finns totalt $\binom{6}{2} = 15$ urval av två kanter, varav tre sådana val inte ger ett spännande träd när de avlägsnats.

SVAR: 12.