

Skrivningskod:   
Glöm den inte!

Om du vill:   
Lägg till tre bokstäver.

**KTH Matematik**  
Olof Heden

$\Sigma$ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

**Lösning till kontrollskrivning 2B, 25 september 2009, 10.45–11.45,  
i SF1610 Diskret matematik för CİNTE.**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks  $n$  medför godkänd uppgift  $n$  vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år),  $n = 1, \dots, 5$ .

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.

**Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.**

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

**Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!**

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar  $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar  $-\frac{1}{2}$ p.)

Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

**Kryssa för** om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå!)

a)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

b)  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^2b^2 + b^4$ .

c)  $\binom{n}{3} \leq \binom{n}{4}$  för alla heltal  $n \geq 4$ .

d)  $n! \cdot m! = (n \cdot m)!$ .

e)  $S(n, k) = kS(n - 1, k) + S(n - 1, k - 1)$

f)  $25!/(12! \cdot 7! \cdot 6!)$  är ett heltal.

sant	falskt
x	
	x
	x
	x
x	
x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

**2a)** (1p) Ange värdet av Stirlingtalet  $S(27, 27)$ .

**SVAR:** 1.

**b)** (1p) Ange antalet sätt att placera 11 identiska objekt i tre olika lådor. (Obs svaret skall vara ett heltal.)

**SVAR:**

$$\binom{11 + 3 - 1}{3 - 1} = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78$$

**c)** (1p) Ange en bra och användbar formel för beräkning av antalet element i unionen av tre mängder  $A$ ,  $B$  och  $C$ .

**SVAR:**  $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ .

Namn	poäng uppg.3

**3)** (3p) Fjorton personer skall delas in i tre grupper med vardera 3, 5 resp 6 personer. På hur många sätt kan detta ske om personerna A, B och C skall placeras i olika grupper. (Det räcker att svara med ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra "räknesätten".)

**Lösning:** Först placerar vi ut A, det finns tre möjliga grupper han kan välja bland, sedan B och då återstår två grupper för honom att välja bland. Den överblivna gruppen är den som C får ta. Så totalt  $3!$  möjliga fördelningar av A, B och C.

Sen ger vi en gruppstillhörighet till de övriga nio personerna, varav 2 skall till gruppen med tre element, 4 till gruppen med fem element och 5 till gruppen med sex element. Antalet möjliga sådana fördelningar ges av multinomialkoefficienten

$$\binom{11}{2, 4, 5}$$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) En klass med 11 flickor och 13 pojkar skall utse en grupp med tre flickor och fyra pojkar. På hur många olika sätt kan detta ske om det är så att flickan  $F$  ingår så kan varken pojken  $P$  eller  $Q$  vara med i gruppen. (Det räcker att svara med ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra "räknesätten".)

**Lösning:** Två möjliga fall, antingen tillhör flickan  $F$  gruppen eller så gör hon inte det.

Fall 1: Välj flickan  $F$ , ett sätt, samt komplettera med ytterligare två av de återstående 11 flickorna vilket går på  $\binom{11-1}{2}$  sätt. Om flickan  $F$  är med kan ingen av pojkarna  $P$  och  $Q$  väljas, så antalet möjliga pojkval är  $\binom{13-2}{4}$ . Om flickan  $F$  finns med i gruppen finns totalt

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{11}{4},$$

möjliga gruppindelningar.

Fall 2: Flickan  $F$  finns inte med och då skall tre flickor bland de övriga 11 flickorna väljas vilket går på totalt  $\binom{11}{3}$  olika sätt. Om flickan  $F$  inte finns med kan pojkarna väljas utan restriktioner, vilket ger  $\binom{14}{4}$  möjligheter. Om flickan  $F$  inte finns med så finns totalt

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{13}{4},$$

möjliga gruppindelningar.

Räknar vi nu samman alla möjligheter blir det totalt

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{11}{4} + \binom{10}{3} \cdot \binom{13}{4},$$

möjliga gruppindelningar, vilket blir vårt svar.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Fem män och fem kvinnor skall ställa sig i två lika långa led framför kassa 1 och kassa 2. På hur många olika sätt kan detta ske om det ena ledet skall ha precis två män? (Det räcker att svara med ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra ”räknesätten”).

**Lösning:**

Op 1: Välj den kö som skall innehålla två män: Totalt  $n_1 = 2$  möjligheter.

Op 2: Utse de två männen och de tre kvinnorna till denna kö: Totalt  $n_2 = \binom{5}{2} \binom{5}{3}$ .

Op 3: Ordna kö 1:  $n_3 = 5!$  olika sätt.

Op 4: Ordna kö 2:  $n_4 = 5!$  olika sätt.

Multiplikationsprincipen ger nu

**SVAR:**

$$2 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 5! \cdot 5!$$