Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik

Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösningar till kontrollskrivning 2A, 25 september 2008, 09.15–10.15, i SF1610 Diskret matematik för IT2.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)**–**f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	falskt
a) $S(n, n) = n$.		x
b) $\binom{n}{n-1} = n$.	x	
c) Det finns mer än hundra sätt för fem olika personer att ställa sig på ett led	x	
d) $\binom{34}{10} = \binom{33}{10} + \binom{33}{11}$.		x
e) $\binom{121}{23} \leq \binom{121}{24}$.	x	
f) $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange värdet av Stirlingtalet $S(3,2)$.

Lösning: Använder formeln $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$ samt att $S(n,n) = 1$ och $S(n,1) = 1$.

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

b) (1p) Ange antalet sätt att ur en mängd med 15 olika element plocka ut en delmängd med precis 12 element. (Obs svaret skall vara ett heltal.)

Lösning:

$$\binom{15}{12} = \binom{15}{15-12} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

c) (1p) Ange en formel för på hur många sätt n identiska objekt kan placeras i k stycken olika lådor.

Lösning:

$$\binom{n+k-1}{k-1} \quad \text{eller} \quad \binom{n+k-1}{n}.$$

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Fyra pojkar och fem flickor skall ställa sig i ett led så att mellan varje par av flickor går en pojke, dvs i ett led av typen FPFPFPFPF. Bestäm antalet olika led som går att ordna. (Det räcker att svara med ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra "räknesätten".)

Lösning: Först ställer sig de fem flickorna i en rad vilket går på 5! olika sätt. Sen ställer vi en pojke mellan den första och den andra flickan till vilket det finns fyra möjliga val. Nu återstår tre möjliga val av pojke mellan flickan på plats två i ledet och flickan på plats tre etc.

Multiplikationsprincipen ger nu vårt

SVAR: $5! \cdot 4!$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm antalet ord av längd sju som man kan bilda med hjälp av bokstäverna A, A, B, B, B, C och D. (Ordet skall alltså bestå av precis två A:n, tre B:n, ett C och ett D och alla sådana kombinationer räknas som ord) (Det räcker att svara med ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra "räknesätten".)

Lösning: Ordet har sju möjliga positioner, varav två skall väljas till A:na, tre till B:na och varsin position skall väljas till C respektive D. Antalet möjliga val ges då av multinomoialkoefficienten

$$\binom{7}{2,3,1,1},$$

som beräknas enligt formeln

$$\binom{7}{2,3,1,1} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!}.$$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Kan man utifrån följande informationen nedan om de tre mängderna A, B och C bestämma antalet element i $A \cap B$:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= 20, \\ |A| &= 10, \\ |B| &= 12, \\ |C| &= 12, \\ |A \cap C| &= 5, \\ |B \cap C| &= 8, \\ |A \cap B \cap C| &= 3. \end{aligned}$$

Bestäm i så fall antalet element i $A \cap B$.

Lösning: Formeln för inklusion exklusion

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cup B \cup C|$$

ger nu att enda möjligheten är att

$$20 = 10 + 12 + 12 - |A \cap B| - 5 - 8 + 3,$$

dvs att $|A \cap B| = 4$. Vi verifierar sedan i ett Venndiagram att mängder enligt ovan går att realisera.