

Skrivningskod:
Glöm den inte!

Om du vill:
Lägg till tre bokstäver.

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösningar till kontrollskrivning 1B, ons 17 september 2007,
09.15–10.15,
i SF1610 Diskret matematik för IT2.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}p$, inget svar $0p$, fel svar $-\frac{1}{2}p$.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

a) $7^3 \equiv 7 \pmod{2}$.

b) Om p är ett primtal sådant att p delar talet a så är $\text{sgd}(a, p) = p$. (OBS $\text{sgd}(x, y) = \text{gcd}(x, y)$)

c) Elementet 8 är inverterbart i ringen Z_{15} .

d) Det finns en injektiv funktion från de naturliga talen till de reella talen.

e) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

f) Ingen symmetrisk relation på en mängd kan vara antisymmetrisk.

sant	falskt
x	
x	
x	
x	
x	
	x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 2, 5, 7, 11, 12\}$ och $C = \{1, 6, 7, 9\}$. Ange elementen i mängden $((A \setminus C) \cup (B \setminus C)) \cap (A \cup B)$

LÖSNING: $A \setminus C = \{3, 5, 8\}$ och $B \setminus C = \{3, 2, 5, 11, 12\}$ och alltså är

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{2, 3, 5, 8, 11, 12\}.$$

Då $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12\}$ får vi nu att

$$((A \setminus C) \cup (B \setminus C)) \cap (A \cup B) = \{2, 3, 5, 8, 11, 12\}.$$

b) (1p) Ange ett element x i ringen Z_9 sådant att $2x = 5$.

LÖSNING: Vi bestämmer en invers till elementet 2 i ringen Z_9 genom typ gissningen att $2 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{9}$ och alltså att $2^{-1} = 5$. Multiplicerar nu bägge leden i ekvationen med detta element och får

$$x = 2^{-1} \cdot 2x = 2^{-1} \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 7.$$

SVAR: 7.

c) (1p) Ange, på valfritt sätt, två olika bijektiva funktioner från $A = \{a, b, c, d, e\}$ till $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

LÖSNING: $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 4, f(e) = 5$ resp $g(a) = 1, g(b) = 2, g(c) = 3, g(d) = 5, g(e) = 4$.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm den största gemensamma delaren till talen 437 och 511.

LÖSNING: Euklides algoritmen ger

$$511 = 1 \cdot 437 + 74$$

$$437 = 6 \cdot 74 - 7$$

$$74 = 11 \cdot 7 - 3$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 3 \cdot 1 + 0$$

den sista ickeförsvinnande resten i algoritmen är 1 och därmed

SVAR: 1.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Relationen R definierad genom att aRb om 7 delar $a - b$ är en ekvivalensrelation på mängden $\{1, 3, 5, 9, 13, 15, 17\}$. Detta behöver du inte visa utan det enda som krävs för full poäng på uppgiften är att du anger de ekvivalensklasser som denna relation ger upphov till.

LÖSNING: Ekvivalensklassen C_n består av de element i mängden som är ekvivalenta med elementet n , dvs

$$C_n = \{x \mid xRn\} = \{x \mid 7 \mid (x - n)\}.$$

Okular besiktning ger nu ekvivalensklasserna (tag ett element i taget och bestäm samtliga element i mängden som är ekvivalenta med elementet):

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1, 15\} \\ C_3 &= \{3, 17\} \\ C_5 &= \{5\} \\ C_9 &= \{9\} \\ C_{13} &= \{13\} \end{aligned}$$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Visa på valfritt sätt att $12^n - 1$ är delbart med 11 för varje naturligt tal $n \geq 1$.

LÖSNING: Vi visar att $12^n - 1 \equiv 0 \pmod{11}$ för alla naturliga tal n :

$$12^n - 1 \equiv_{11} 1^n - 1 \equiv_{11} 1 - 1 \equiv_{11} 0.$$