Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Kontrollskrivning 1A, on 14 november 2007, 13.15–14.15, i SF1610 Diskret matematik för IT2.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	123 är ett primtal.		x
b)	Om p är ett primtal och p delar produkten ab så delar p minst ett av de hela talen a och b	x	
c)	Ringen Z_{13} innehåller 12 inverterbara element.	x	
d)	$(AUB)^C \cap (A^C \cap B^C) = \emptyset$.		x
e)	Varje **injektion** $f : \{1,2,4\} \to \{2,4,6\}$ är också en **bijektion**.	x	
f)	De rationella talen är en uppräknelig mängd.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 1\}$ och $B = \{\emptyset, 1\}$ ange antalet element i $A \times B$.

SVAR: 6

b) (1p) Ange ett element x i ringen Z_8 sådant att $x + 5 = 3$.

SVAR: 6.

c) (1p) Ange en surjektiv funktion från $A = \{1, 2, 3, 4\}$ till $B = \{2, 3, 4\}$.

SVAR: $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 4, f(4) = 3$.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Avgör om 64 är **inverterbart** i $\mathbb{Z}_{179}$. Om det är det, bestäm inversen.

LÖSNING: Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 179 &= 3 \cdot 64 - 13 \\ 64 &= 5 \cdot 13 - 1 \end{aligned}$$

Vi ser att 64 är relativt primt till 179 och därfär inverterbart. Räkningarna ovan ger nu

$$1 = 5 \cdot 13 - 64 = 5(3 \cdot 64 - 179) - 64 = 14 \cdot 64 - 5 \cdot 179,$$

dvs

$$1 = 14 \cdot 64 - 5 \cdot 179.$$

Vi räknar nu modulo 179 och från ovan får vi

$$14 \cdot 64 \equiv 1 \pmod{179}.$$

SVAR: 14

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Visa att relationen R definierad genom att aRb om 5 delar $a-b$ är en ekvivalensrelation på mängden av hela tal.

LÖSNING:

(i) 5 delar talet 0 så 5 delar $a-a$ för alla a, dvs aRa för alla a. Vi har nu visat

$$aRa \quad \text{för alla} \quad a.$$

(ii) Om aRb så gäller att 5 delar $a-b$ dvs $a-b=k\cdot 5$ men då gäller också att 5 delar $b-a$ eftersom $b-a=(-k)\cdot 5$. Vi har nu visat

$$aRb \quad \Rightarrow \quad bRa.$$

(iii) Om aRb och bRc så gäller att 5 delar $a-b$ dvs $a-b=k\cdot 5$ och 5 delar $b-c$ dvs $b-c=k'\cdot 5$ men då gäller också att 5 delar $a-c$ eftersom $a-c=(k+k')\cdot 5$. Vi har nu visat

$$aRb \quad \text{och} \quad bRc \quad \Rightarrow \quad aRc.$$

Egenskaperna $(i),(ii)$ och (iii) visar att R är en ekvivalensrelation.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bestäm den minsta positiva resten vid division av talet 46^{151} med 9.

LÖSNING: Då $46 \equiv 1 \pmod 9$ får vi att

$$46^{151} \equiv_9 1^{151} \equiv_9 1.$$