Matematiska Institutionen
KTH

**Lösningar till några grupptal inför lappskrivning 3 CINTE ht09.**

1. Betrakta en grupp $G$ med multiplikationstabellen:

$$\begin{array}{c|cccccccc} \circ & a & b & c & d & f & g & h & k \\ \hline a & a & b & c & d & f & g & h & k \\ b & b & c & d & a & g & h & k & f \\ c & c & d & a & b & h & k & f & g \\ d & d & a & b & c & k & f & g & h \\ f & f & g & h & k & a & b & c & d \\ g & g & h & k & f & b & c & d & a \\ h & h & k & f & g & c & d & a & b \\ k & k & f & g & h & d & a & c & b \end{array}.$$

   (a) Är gruppen abelsk?
   **Lösning:** Ja, ty tabellen är symmetrisk kring den så kallade huvudaxeln.

   (b) Bestäm identitetselement och bestäm inverser till alla element.
   **Lösning:** I tabellen syns att $ax = x$ för alla $x$. Alltså måste $a$ vara ett identitetselement.

   (c) Bestäm alla element som har ordning 2.
   **Lösning:** Vi inspekterar alla produkter $x \circ x$ i tabellen. Vi finner att endast elementen $c$, $f$ och $h$ uppfyller $x \neq a$ men $x \circ x = a$. Så
   **SVAR:** Elemeneten $c$, $f$ och $h$.

   (d) Finns det något element som genererar hela gruppen, dvs finns det något element $x$ så att varje element $y$ i $G$ kan skrivas $y = x^k$ för något heltal $k$.
   **Lösning:** Vi inspekterar alla element $x \notin \{a, c, f, h\}$, ty dessa element har ordning ett eller ordning två, och alla potenser $x^k$, för $k = 1, 2, \ldots, 8$, i tabellen. Vi finner att de övriga elementen har ordning 4. Så
   **SVAR:** Inget element genererar hela gruppen

   (e) Beräkna $abcdef$, $ac^{-1}d^2cd^{-1}$ och $f^3g$.
   **SVAR:** Förlåt men $e$ finns inte med så vi beräknar $abcdf = bcdf = ddf = cf = h$, Gruppen är abelsk så $ac^{-1}d^2cd^{-1} = acc^{-1}ddd^{-1} = aada = d$ och då $ff = a$ så gäller $f^3g = fffg = afg = fg = b$.

2. Skriv upp multiplikationstabellen till gruppen $< Z_7 \backslash \{0\}, \cdot >$. Bestäm också samtliga element $x$ i denna grupp sådana att $x^3 = 1$.

   **Lösning:**

$$\begin{array}{c|cccccc} \cdot & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}.$$

   Vi kontrollerar element för element om någon 3-potens blir 1.
   $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$,

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 1,$
$3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6,$
$4 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 1,$
$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 6,$
$6 \cdot 6 \cdot 6 = 1 \cdot 6 = 6.$
Så

**SVAR:** elementen $x = 1, 2$ eller 4.

3. Går följande tabell att komplettera så att det blir multiplikationstabellen till en grupp?

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | | | |
| $d$ | $d$ | $f$ | | | |
| $f$ | $f$ | $c$ | | | |

**Lösning:** Något element $x$ måste uppfylla $c \circ x = f$. Enda möjliga element är $x = d$, ty $x = c$ är uteslutet då $b \circ c = f$ och $x = f$ uteslutet då $c$ ej är identitetselementet. Vi har nu tabellen

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | | $f$ | |
| $d$ | $d$ | $f$ | | | |
| $f$ | $f$ | $c$ | | | |

Måste finnas ett $c$ i sista kolonnen och ett $d$ i näst näst sista kolonnen. Men inget ytterligare $c$ i sista raden resp näst nst sista raden och inget $d$ i näst sista och näst näst sista raden ger nu tabellen

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | | $f$ | |
| $d$ | $d$ | $f$ | | | $c$ |
| $f$ | $f$ | $c$ | $d$ | | |

Återstår att fylla i med $a$ och $b$. Kalla det ena av elementen för $x$ och det andra för $y$ och antag att $c \circ c = x$. Vi får då följande tabeller, om varje rad resp kolonnskall innehålla verje element precis en gång:

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $x$ | $f$ | |
| $d$ | $d$ | $f$ | | | $c$ |
| $f$ | $f$ | $c$ | $d$ | | |

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $x$ | $f$ | $y$ |
| $d$ | $d$ | $f$ | $y$ | $x$ | $c$ |
| $f$ | $f$ | $c$ | $d$ | | |

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $x$ | $f$ | $y$ |
| $d$ | $d$ | $f$ | $y$ | $x$ | $c$ |
| $f$ | $f$ | $c$ | $d$ | $y$ | $x$ |

Alltså två möjliga tabeller.

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $a$ | $f$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $f$ | $b$ | $a$ | $c$ |
| $f$ | $f$ | $c$ | $d$ | $b$ | $a$ |

resp

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $b$ | $f$ | $a$ |
| $d$ | $d$ | $f$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $f$ | $f$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |

Den sista tabellen kan vi utesluta som en möjlighet eftersom $d \circ c = a$ som är identitet och alltså $d^{-1} = c$, vilket ju inte går ihop med att $c \circ d = f$, eftersom $x^{-1} \circ x = a$ skall gälla för alla $x$.

Den första tabellen ger en operation som är sluten, finns en identitet och varje element har en invers. Men ej säkert är att associativa lagen är uppfylld, dvs vi måste undersöka om $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ för alla $x$ , $y$ och $z$.

Vi undersöker nu detta: $(b \circ c) \circ d = f \circ d = b$, men $b \circ (c \circ d) = b \circ f = d$. Vi hade tur, redan vår första kontroll visar att tabellen inte uppfyller associativa lagen.

4. Bestäm ordningen av samtliga element i $< Z_8, + >$.

   **Lösning:** Elementet 0 är identitets element. Elementen 1, $1+1 \neq 0$, $1+1+1 \neq 0$, ...,$1+1+1+1+1+1+1 \neq 0$, $1+1+1+1+1+1+1+1 = 0$ ger att 1 har ordning 8. $2+2 = 4$, $2+2+2 = 6$, $2+2+2+2 = 0$ ger att 2 har ordning 4, Osv på samma sätt får man

   **SVAR:** 1 har ordning 8
   2 har ordning 4
   3 har ordning 8
   4 har ordning 2
   5 har ordning 8
   6 har ordning 4
   7 har ordning 8

5. Kan en grupp som inte är abelsk vara cyklisk?

   **Lösning:** Nej eftersom varje cyklisk grupp är abelsk, nämligen om elementet $g$ genererar den cykliska gruppen så gäller

$$g^n \cdot g^m = g^{n+m} = g^{m+n} = g^m \cdot g^n.$$

6. Betrakta följande abstrakt definierade multiplikationstabell till en grupp $G$:

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ | $g$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $f$ | $g$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $f$ | $d$ | $a$ | $g$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $g$ | $a$ | $c$ | $b$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $c$ | $g$ | $b$ | $d$ | $a$ |
| $g$ | $g$ | $d$ | $b$ | $f$ | $a$ | $c$ |

   (a) Bestäm alla cykliska delgrupper till denna grupp. Ange också elementens ordningar.
   **Lösning:** Ur tabellen framgår att $a$ är gruppens identitetselemenrt eftersom $ax = x$ för alla $x$ i $G$. För varje element $x \in G$ bestämmer vi den cykliska grupp som genereras av $x$, dvs mängden

$$< x >= \{x, x^2, x^3, \ldots, x^k = a\}$$

   där $k$ är det första, och minsta positiva, heltal för vilket $x^k = a$.
   $< a >= \{a^1 = a\}$,
   $< b >= \{b, b^2 = a\}$,
   $< c >= \{c, c^2 = d, c^3 = a\}$,
   $< d >= \{d, d^2 = c, d^3 = a\}$,
   $< f >= \{f, f^2 = d, f^3 = b, f^4 = c, f^5 = g, f^6 = a\}$,
   $< g >= \{g, g^2 = c, g^3 = b, g^4 = d, g^5 = f, g^6 = a\}$

(b) Är gruppen själv cyklisk.
**Lösning:** Ja eftersom

$$G = \{a, b, c, d, f, g\} = \{f, d, b, c, g, a\} = \{f, f^2 = d, f^3 = b, f^4 = c, f^5 = g, f^6 = a\} =< f > .$$

(c) Bestäm samtliga sidoklasser till delgruppen $H = \{a, b\}$.
**Lösning:** Vi bestämmer mängderna $H$, $Hb$, $Hc$, $Hd$, $Hf$ och $Hg$. Vi får att
$H = Hb = \{ab, bb\} = \{b, a\}$
$Hc = \{ac, bc\} = \{c, f\} = Hf$
$Hd = \{ad, bd\} = \{d, g\} = Hg$.

7. Låt $\varphi = (1\ 2\ 4\ 7)(3\ 5\ 6)$, $\psi = (1\ 5\ 3)(4\ 2)(6\ 7)$ och $\gamma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$.
a) Skriv permutationerna $\varphi\psi\gamma$ och $\psi\gamma\varphi$ som produkter av disjunkta cykler.

**SVAR:** $\varphi\psi\gamma = (1\ 7\ 6\ 3\ 4\ 5)(2)$ och $\psi\gamma\varphi = (1)(2\ 3\ 7\ 4\ 5\ 6)$.
b) Bestäm $\psi^{-1}\varphi^{-1}$.

**Lösn.** För att få inverserna av permutationerna vänder vi bara på ordningen i cyklerna. Vi får $\varphi^{-1} = (7\ 4\ 2\ 1)(6\ 5\ 3)$ och $\psi^{-1} = (3\ 5\ 1)(2\ 4)(7\ 6)$. Vi får svar: $(1\ 6)(2\ 3\ 7)(4)(5)$

c) Beräkna $\psi^{-1}\gamma\psi$.

**Svar:** $(1\ 7\ 6\ 3\ 4\ 5\ 2)$
d) Bestäm ordningen hos permutationerna $\psi^{-1}\varphi^{-1}$, $\gamma$ och $\psi^{-1}\gamma\psi$.

**Lösn.** Vi använder att ordningen av en cykel är lika med cykellängden samt att om cyklerna är disjunkta, dvs saknar gemensamma element, så är ordningen av produkten av dessa cykler lika med den minsta gemensamma multipeln av alla cykellängder. Så svar 6, 7 resp 7.
e) Skriv permutationerna $\varphi$, $\psi$ och $\gamma$ som produkter av transpositioner.

**Lösn.** Det finns många sätt att skriva en cykel som en produkt av transpositioner. Ett sätt är följande:

$$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n) = (a_1\ a_n)(a_1\ a_{n-1})(a_1\ a_{n-2}) \ldots (a_1\ a_4)(a_1\ a_3)(a_1\ a_2).$$

Använder vi denna metod så får vi svaret. $\varphi = (1\ 7)(1\ 4)(1\ 2)$, $\psi = (1\ 3)(1\ 5)(4\ 2)(6\ 7)$, $\gamma = (1\ 7)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$.

f) Vilka av permutationerna i uppgift d) är udda respektive jämna.

**SVAR:** $\varphi$ är udda och de övriga är jämna.

**Lösn.** En permutation är jämn om den kan skrivas som en produkt av ett jämnt antal permutationer annars är den udda. Använder vi dett får vi svaret.