

Matematiska Institutionen  
KTH

**Några grupptal inför lappskrivning 3 CINTE ht09.**

1. Betrakta en grupp  $G$  med multiplikationstabellen:

$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$	$g$	$h$	$k$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$	$g$	$h$	$k$
$b$	$b$	$c$	$d$	$a$	$g$	$h$	$k$	$f$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$	$h$	$k$	$f$	$g$
$d$	$d$	$a$	$b$	$c$	$k$	$f$	$g$	$h$
$f$	$f$	$g$	$h$	$k$	$a$	$b$	$c$	$d$
$g$	$g$	$h$	$k$	$f$	$b$	$c$	$d$	$a$
$h$	$h$	$k$	$f$	$g$	$c$	$d$	$a$	$b$
$k$	$k$	$f$	$g$	$h$	$d$	$a$	$c$	$b$

- (a) Är gruppen abelsk?  
 (b) Bestäm identitets-element och bestäm inverser till alla element.  
 (c) Bestäm alla element som har ordning 2.  
 (d) Finns det något element som genererar hela gruppen, dvs finns det något element  $x$  så att varje element  $y$  i  $G$  kan skrivas  $y = x^k$  för något heltal  $k$ .  
 (e) Beräkna  $abcdef$ ,  $ac^{-1}d^2cd^{-1}$  och  $f^3g$ .
2. Skriv upp multiplikationstabellen till gruppen  $\langle Z_7 \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ . Bestäm också samtliga element  $x$  i denna grupp sådana att  $x^3 = 1$ .
3. Går följande tabell att komplettera så att det blir multiplikationstabellen till en grupp?

$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$b$	$b$	$a$	$f$	$c$	$d$
$c$	$c$	$d$			
$d$	$d$	$f$			
$f$	$f$	$c$			

4. Bestäm ordningen av samtliga element i  $\langle Z_8, + \rangle$ .
5. Kan en grupp som inte är abelsk vara cyklisk?
6. Betrakta följande abstrakt definierade multiplikationstabell till en grupp  $G$ :

$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$	$g$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$	$g$
$b$	$b$	$a$	$f$	$g$	$c$	$d$
$c$	$c$	$f$	$d$	$a$	$g$	$b$
$d$	$d$	$g$	$a$	$c$	$b$	$f$
$f$	$f$	$c$	$g$	$b$	$d$	$a$
$g$	$g$	$d$	$b$	$f$	$a$	$c$

- (a) Bestäm alla cykliska delgrupper till denna grupp. Ange också elementens ordningar.

- (b) Är gruppen själv cyklisk.
- (c) Bestäm samtliga sidoklasser till delgruppen  $H = \{a, b\}$ .
7. Låt  $\varphi = (1\ 2\ 4\ 7)(3\ 5\ 6)$ ,  $\psi = (1\ 5\ 3)(4\ 2)(6\ 7)$  och  $\gamma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ .
- Skriv permutationerna  $\varphi\psi\gamma$  och  $\psi\gamma\varphi$  som produkter av disjunkta cykler.
  - Bestäm  $\psi^{-1}\varphi^{-1}$ .
  - Beräkna  $\psi^{-1}\gamma\psi$ .
  - Bestäm ordningen hos permutationerna  $\psi^{-1}\varphi^{-1}$ ,  $\gamma$  och  $\psi^{-1}\gamma\psi$ .
  - Skriv permutationerna  $\varphi$ ,  $\psi$  och  $\gamma$  som produkter av transpositioner.
  - Vilka av permutationerna i uppgift d) är udda respektive jämna.

**Anm.** Svar och lösningar meddelas senare.