Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning i Diskret Matematik för CINTE, CL2 och Media 1, SF1610 och 5B1118, fredagen den 23 oktober 2009, kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

Var och en av nedanstående uppgifter svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på en kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på motsvarande uppgift. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (3p) Lös ekvationen $5(7x + 3) = 1$ i ringen Z_9.

2. (3p) En klass med 15 elever skall delas in i fem grupper med vardera 1, 2, 3, 4 resp 5 elever. Hur många möjliga indelningar finns för detta. (För full poäng räcker det att svara med ett uttryck som innehåller de fyra räknesätten.)

3. (3p) Nedan finner du en tabell som är en delvis ifylld multiplikationstabell till en grupp G med elementen e, a, b, c, d. Bestäm ett element x i gruppen sådant att $axb^{-1} = c$.

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a				
b	b			e	a
c	c		e	a	
d	d	e	a	b	

4. (3p) Konstruera ett RSA-krypto, dvs ange parametrar n, e och d och som har $e = 7$. Dekryptera därefter meddelandet 2, dvs bestäm $D(2)$.

5. (3p) För vilka värden på talet n och m har den kompletta bipartita grafen $K_{n,m}$ en Eulerkrets.

   (Glöm ej att motivera ditt svar.)

DEL II

6. Du har 8 identiska röda bollar och 4 identiska blå bollar som skall placeras efter varandra i olika rader. På hur många sätt kan detta ske om

   (a) (1p) bollarna skall placeras i en rad.

   (b) (1p) i två lika långa rader, rad 1 och rad 2.

   (c) (2p) i tre icketomma rader, rad 1, rad 2 och rad 3.

7. (3p) Ge kontrollmatrisen H till en 1-felsrättande kod C, vars ord har längd 7, och som har så många ord som möjligt, och som uppfyller följande tre krav:

   (i) ordet 0111000 tillhör C.

   (ii) ordet 1111100 tillhör inte C men ordet går att rätta på sedvanligt sätt med hjälp av H.

   (iii) ordet 1111111 går inte att rätta.

   (**Anm.** Poäng sätts bl a efter hur stor kod C man lyckas konstruera.)

8. (4p) Betrakta gruppen $G = (Z_{29} \setminus \{0\}, \cdot)$. Denna grupp har precis en delgrupp H med fyra element och en delgrupp K med 14 element. Bestäm $H \cap K$. (Du får om du vill, och utan att behöva bevisa det, använda att också $H \cap K$ kommer att vara en delgrupp till G med mer än ett element.)

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Ett spännande träd till en graf G är en delgraf T till G sådan att T är ett träd och T och G har samma mängd av noder. Vidare gäller att en graf G är sammanhängande precis då G har ett spännande delträd.

   (a) (1p) Rita två olika, dvs ickeisomorfa, grafer som har precis tre spännade träd vardera.

   (b) (2p) Är det sant att om en graf G bara har ett spännade träd så måste G vara ett träd. Svaret skall givetvis motiveras. En resonerande motivering är OK.

   (c) (2p) Kan en sammanhängande graf ha 75 kanter och 63 noder varav två av noderna har valens 9 vardera.

10. (a) (1p) Ge en lämplig definition av vad som menas med minsta gemensamma multipeln, $\mathrm{mgm}(a, b, c)$, av tre tal a, b och c.

    (b) (1p) Bestäm $\mathrm{mgm}(124, 45, 50)$.

    (c) (3p) Antag att du har en metod att beräkna största gemensamma delaren, $\mathrm{sgd}(x, y)$, till två tal x och y. Utred om du kan finna en formel, eller metod, som ger den minsta gemensamma multipeln av tre tal a, b och c, uttryckt i, eller med hjälp av, en eller flera beräkningar av största gemensamma delaren av två olika tal.