1. Vektorerna är linjärt beroende precis då

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2+a \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 5 & 0 & 3 & 4a \end{vmatrix} = -1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2+a \\ 2 & 1 & a \\ 5 & 3 & 4a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2-a \\ 2 & 1 & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2-a \\ -1 & a \end{vmatrix} = -2a + (2-a) = 2 - 3a.$$

När $a \neq \frac{2}{3}$ är vektorerna linjärt oberoende.

2. Vi undersöker om det finns tal x_1, x_2 och x_3 sådana att

$$x_1(1,2,3,4) + x_2(1,0,1,-1) + x_3(2,1,1,0) = (1,2,1,2).$$

Detta ger ett ekvationssystem som på tablåform kan skrivas och lösas enligt nedan.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

vilket ju inte är möjligt eftersom $x_1 = -1$ och $4x_1 = 2$ är en orimlighet.

Svar: Den givan vektorn tillhör inte det givna linjära höljet.

3. Linjära höljet av dessa vektorer är lika med det minsta delrum som innehåller dessa vektorer. Vi lägger in vektorerna som rader i en matris. Sen utför vi elementära radoperationer på matrisen tills den kommer på så kallad trappsetgsform. Raderna som är skilda från noll bildar då en bas och dimensionen är lika med antale icke nollrader.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Svar: Dimensionen blir 3 och en bas till exempel $(1,2,1,2,1)$, $(0,1,3,3,2)$ och $(0,0,10,7,8)$.